

确定土的最大干密度和最优含水率的数解法

The numerical solutions of maximum dry density and optimum water content of soil

黄英, 符必昌

(昆明理工大学, 云南 昆明 650051)

中图分类号: TU 411.2

文献标识码: A

文章编号: 1000-4548(2002)04-0538-03

作者简介: 黄英(1963-), 女, 重庆人, 硕士, 副教授, 主要从事岩土力学教学及特殊土的研究工作。

1 前言*

不论是在水利水电工程的土坝填筑, 还是在工民建工程的地基回填以及公路工程的路基填筑中, 都不可避免地涉及到确定土的最大干密度和最优含水率问题, 这两个指标的获得是通过土的击实试验进行测定。长期以来, 击实试验以用料多、耗费时间长、耗费劳动力等被认为是很麻烦的试验, 但在实际工程中, 它又是不可缺少的非常重要的试验, 土的渗透、压缩、剪切等试验在很多情况下都是由击实试验结果来控制。以往对击实试验成果的整理, 都是根据土的干密度和含水率的关系作出击实曲线, 用图解法求最大干密度和最优含水率, 这一方法沿用已久, 积累了较为丰富的实际经验。但也存在一定问题: 一是图解法人为误差较大; 二是图解法的前提是击实曲线必须要有顶点, 因而要有多个试验点才能画出完整的击实曲线。在某些特殊情况下, 如时间短、土料有限或制样含水率控制不好时, 得出的试验点数少, 不能作出完整的击实曲线, 很有可能击实曲线没有顶点, 要求得最大干密度和最优含水率就比较困难, 这时需要补做试验点来确定, 相应地延长了时间, 增大了工作量。如果击实指标不能按时得出, 则会影响整个试验进度。因而寻求一种既省时、省力、省料, 又能尽快地准确地确定土的最佳击实指标的方法, 不论是在实验室工作中还是在实际工程中都是非常必要的, 也是非常实用的。

2 确定土的最大干密度和最优含水率的数解法

2.1 干密度和含水率的关系

通过对大量土的击实试验成果的分析研究, 发现不同的土在不同击实功能下, 其干密度和含水率之间的关系可统一表示为

$$\rho_d = aw^2 + bw + c \quad (1)$$

式中 ρ_d , w 分别为土的干密度($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)和与此对应的含水率(%); a , b , c 为与击实土样和试验有关的系数。

2.2 最大干密度和最优含水率的确定

式(1)表明, 土的干密度随含水率变化, 存在极值。当含水率变化到某一值时, 干密度达到一最大值, 这时的干密度和含水率就是最大干密度和最优含水率。实际上, 它就是击实曲线顶点的坐标, 可根据式(1)求解。

将式(1)两边对 w 分别求一阶和二阶导数可得

$$\frac{d\rho_d}{dw} = 2aw + b \quad (2)$$

$$\frac{d^2\rho_d}{dw^2} = 2a \quad (3)$$

由式(3)知, 如 $\frac{d^2\rho_d}{dw^2} < 0$, 则 $a < 0$, 这时式(1)存在极大值。令式(2)等于零, 可得

$$w_{op} = -\frac{b}{2a} \quad (4)$$

代式(4)入式(1)可得

$$\rho_{dmax} = -\frac{b^2}{4a} + c \quad (5)$$

则式(4)(5)就是所要求的土的最优含水率和最大干密度。因此, 土的最大干密度和最优含水率可通过系数 a , b , c 来表达。只要确定了系数 a , b , c , 相应的最大干密度和最优含水率也就确定了。

2.3 系数 a , b , c 的确定

要用数解法确定土的最大干密度和最优含水率, 则必须先求出式(4)(5)中的三个系数, 它们可按选点法或最小二乘法确定。

(1)按选点法确定

在一组土的击实试验数据中, 选定三个试验点, 相应地有三个干密度和含水率(ρ_{d1} , w_1), (ρ_{d2} , w_2), (ρ_{d3} , w_3), 它们都应满足式(1), 可得到三个方程, 联

表 1 数解法与图解法对比分析表

Table 1 The analysis sheet of the numerical solution and the graphical solution

序号	选点法					最小二乘法					图解法	
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	$\rho_{\text{dmax}}^{\text{计}}$ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	$w_{\text{op}}^{\text{计}}$ /%	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	$\rho_{\text{dmax}}^{\text{计}}$ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	$w_{\text{op}}^{\text{计}}$ /%	$\rho_{\text{dmax}}^{\text{图}}$ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	$w_{\text{op}}^{\text{图}}$ /%
1	-57.12	23.56	-0.81	1.62	20.6	-45.12	18.77	-0.34	1.61	20.8	1.62	20.5
2	-55.38	17.85	0.31	1.75	16.1	-53.57	17.25	0.36	1.75	16.1	1.75	16.5
3	-180.00	72.76	-5.71	1.64	20.2	-177.30	71.67	-5.60	1.64	20.2	1.64	19.8
4	-41.25	12.03	0.91	1.79	14.6	-39.50	11.54	0.94	1.78	14.6	1.78	15.0
5	-92.25	40.60	-2.82	1.65	22.0	-75.09	33.04	-1.99	1.64	22.0	1.64	22.0
6	-78.64	30.54	-1.28	1.69	19.4	-80.63	31.30	-1.35	1.69	19.4	1.69	19.0
7	-267.00	31.00	1.34	2.24	5.8	-190.81	20.56	1.68	2.23	5.4	2.20	5.5
8	-38.15	16.02	-0.07	1.61	21.0	-36.26	15.21	0.02	1.62	21.0	1.61	21.0
9	-32.19	15.65	-0.34	1.56	24.3	-33.12	16.05	-0.38	1.56	24.2	1.56	24.0
10	-32.00	14.89	-0.16	1.57	23.3	-31.74	14.78	-0.15	1.57	23.3	1.57	24.4

立求解这三个方程,就可得到系数 *a*、*b*、*c*。这样,只需要测得三个试验点的干密度和含水率,就可求出该种土的最大干密度和最优含水率。显然,当测点多于三个时,在不同的数据组合情况下,计算出的系数 *a*、*b*、*c* 不同,因而按选点法确定的系数具有不确定性。

(2)按最小二乘法确定

按照最小二乘法原理,最好的曲线为能使各点同曲线的偏差的平方和最小^[2]。联立求解以下三个方程就可得到三个系数:

$$\sum_{i=1}^n \rho_{di} - a \sum_{i=1}^n w_i^2 - b \sum_{i=1}^n w_i - nc = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \rho_{di} - a \sum_{i=1}^n w_i^3 - b \sum_{i=1}^n w_i^2 - c \sum_{i=1}^n w_i = 0 \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n w_i^2 \rho_{di} - a \sum_{i=1}^n w_i^4 - b \sum_{i=1}^n w_i^3 - c \sum_{i=1}^n w_i^2 = 0 \quad (8)$$

式中 *n* 为试验点数。显然,最小二乘法包含了所有试验点,对一组击实试验数据,系数 *a*、*b*、*c* 是确定的。

2.4 误差分析

为了分析数解法与图解法的误差,将选点法、最小二乘法计算结果与图解法量测结果进行对比,用平行误差来衡量。平行误差为数解法计算结果与图解法量测结果之差,可表示为

$$\Delta \rho_{\text{dmax}} = \rho_{\text{dmax}}^{\text{计}} - \rho_{\text{dmax}}^{\text{图}} \quad (9)$$

$$\Delta w_{\text{op}} = w_{\text{op}}^{\text{计}} - w_{\text{op}}^{\text{图}} \quad (10)$$

式中 $\rho_{\text{dmax}}^{\text{计}}$ 、 $w_{\text{op}}^{\text{计}}$ 为数解法计算的最大干密度和最优含水率; $\rho_{\text{dmax}}^{\text{图}}$ 、 $w_{\text{op}}^{\text{图}}$ 为图解法量测的最大干密度和最优含水率; $\Delta \rho_{\text{dmax}}$ 、 Δw_{op} 为最大干密度和最优含水率的平行误差。

3 实例对比

为了对比分析本文提出的数解法与传统图解法确定土的最大干密度和最优含水率的误差,现对本实验

室做的一些土(这些土料包括:粘性土、砂夹石、土夹石、煤碴料、风化泥岩、膨胀性土、红土等类型)的击实试验成果用选点法和最小二乘法进行计算,同时还计算了不同试验数据组合对最大干密度和最优含水率的影响,部分计算结果见表 1~3。

表 2 误差分析表

Table 2 The analysis of the errors

序 号	选点法与图解法		最小二乘法与图解法		选点法与最小二乘法	
	$\Delta \rho_{\text{dmax}}$ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	Δw_{op} /%	$\Delta \rho_{\text{dmax}}$ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	Δw_{op} /%	$\Delta \rho_{\text{dmax}}$ ($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)	Δw_{op} /%
1	0.00	0.1	-0.01	0.3	0.01	-0.2
2	0.00	-0.4	0.00	-0.4	0.00	0.0
3	0.00	0.4	0.00	0.4	0.00	0.0
4	0.01	-0.4	0.00	-0.4	0.01	0.0
5	0.01	0.0	0.00	0.0	0.01	0.0
6	0.00	0.4	0.00	0.4	0.00	0.0
7	0.04	0.3	0.03	-0.1	0.01	0.4
8	0.00	0.0	0.01	0.0	-0.01	0.0
9	0.00	0.3	0.00	0.2	0.00	0.1
10	0.00	-1.1	0.00	-1.1	0.00	0.0

4 结果分析

(1)表 1 表明,对同一种土,按选点法、最小二乘法计算的三个系数不同,*a* 为负,*b* 为正,*c* 可正可负。但两种方法得到的最大干密度和最优含水率基本一致,且与图解法结果接近,说明数解法计算最大干密度和最优含水率的可行性。

(2)表 2 的误差分析表明,最优含水率的误差大于最大干密度的误差。最大干密度的平行误差除个别达 0.04($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$)外,其余的都小于 0.04($\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$),大多数为零;最优含水率的平行误差除极少数大于 1.0%外,其余的都小于 1.0%,说明用数解法确定土的最大干密度和最优含水率的合理性,同时也证实了土的干密度和含水率之间的分布规律。

表 3 选点法不同数据组合对比分析表

Table 3 Comparative analysis for the select method with different composed data

序号	组合情况	试验参数			最大干密度/($\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$)			最优含水率/%		
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	计算结果	平行误差	极差	计算结果	平行误差	极差
1	I	-57.12	23.56	-0.81	1.62	0.00	0.04	20.6	0.1	2.2
	II	-48.27	19.98	-0.46	1.61	-0.01		20.7	0.2	
	III	-25.15	9.30	0.78	1.64	0.02		18.5	-2.0	
	IV	-38.78	16.09	-0.07	1.60	-0.02		20.7	0.2	
4	I	-41.25	12.03	0.91	1.79	0.01	0.01	14.6	-0.4	0.7
	II	-40.00	11.70	0.92	1.78	0.00		14.6	-0.4	
	III	-32.54	9.86	1.04	1.79	0.01		15.2	0.2	
	IV	-37.97	11.03	0.98	1.78	0.00		14.5	-0.5	
10	I	-32.00	14.89	-0.16	1.57	0.00	0.01	23.3	-1.0	0.1
	II	-30.91	14.32	-0.08	1.58	0.01		23.2	-1.1	
	III	-31.64	14.73	-0.14	1.57	0.00		23.3	-1.0	
	IV	-31.79	14.80	-0.15	1.57	0.00		23.3	-1.0	

(3)表 3 表明 ,对选点法 ,不同数据组合得出的系数不同 ,相应地最大干密度和最优含水率也不同 ,个别点最大干密度的极差达 0.04($\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$) ,最优含水率的极差达 2.2%。说明不同数据组合确定的系数具有不确定性 ,对最大干密度和最优含水率都有一定影响。值得注意的是 ,由于试验误差 ,按选点法计算时 ,当三个点的干密度随含水率增大而增大或随含水率减小而减小 ,且相邻两点的含水率差小于 2%时 ,有时会出现不合理的计算结果。这时应补点 ,使测定的三个试验点相邻两点的含水率差大于 2% ,这样计算结果较准确。在试验过程中 ,含水率间距应基本均匀 ,按规范^[1]规定 ,击实试验制样含水率一般相差 2% ,五个试验点含水率变化范围 10% ,现测三个试验点 ,制样含水率可按相差 3%控制。

(4)实例计算结果表明 ,图解法、最小二乘法和选点法三种方法得出的最大干密度和最优含水率基本一致 ,在实际工程中都可选用。但从理论上讲 ,数解法比图解法结果准确 ,最小二乘法比选点法结果准确。因而实际应用时 ,数解法可作为图解法的补充 ,选点法可作为参考。有条件时 ,尽可能多测几个试验点 ,按选点法计算可以进行对比分析 ,按最小二乘法计算可以消

除系数的不确定性对最大干密度和最优含水率的影响。

5 结 语

土的最大干密度和最优含水率可以用数解法确定。实例计算结果表明 ,选点法、最小二乘法与图解法结果基本接近 ,误差很小 ,能够满足要求。因而本文提出的数解法为准确确定土的最大干密度和最优含水率提供了一种新的方法 ,可以作为现行图解法的补充。这种计算方法所需试验点少、不需作出完整的击实曲线、人为误差小 ,可以直接在计算机上快速实现 ,特别是最小二乘法消除了选点法系数不确定性的影响 ,使计算结果更准确更符合实际 ,是一种在实际工程中值得推广的实用方法。

参考文献：

[1] SL237—1999 ,土工试验规程[S]. 北京 :中国水利电力出版社 ,1999.91 - 97.
[2] 董德元 ,杨 节 ,苏敏文 ,等. 试验研究的数理统计方法[M]. 北京 :中国计量出版社 ,1987.216 - 228.