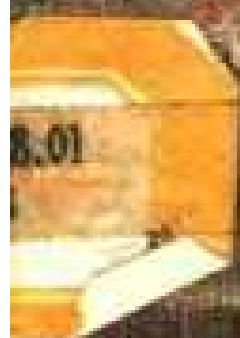


现代混凝土基础理论

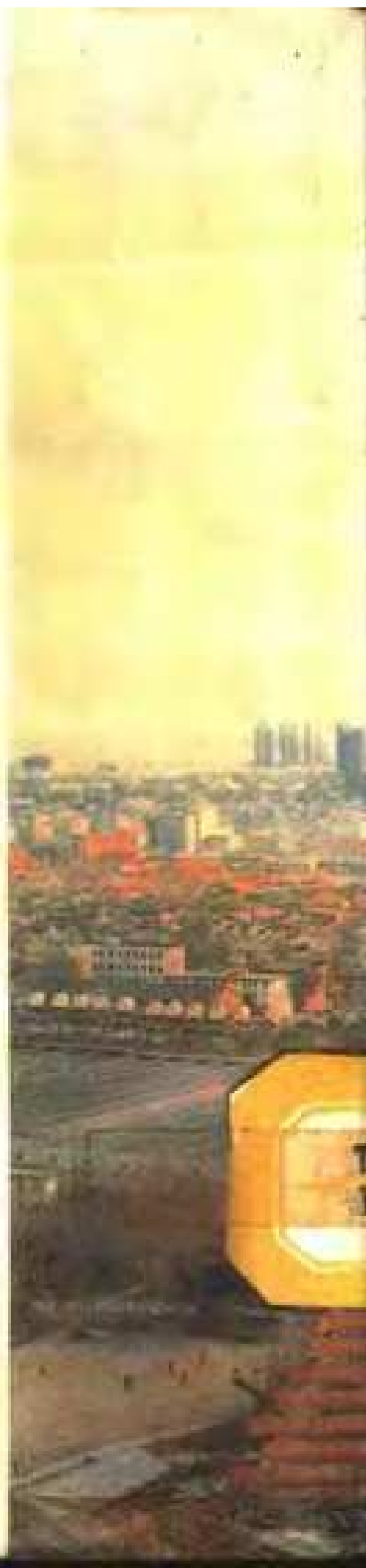
TONGJI
DAXUE
CHUBANSHE

张士铎 编著



ISBN7-5608-1402-6/TU·117

定价：9.00 元



现代混凝土基础理论

张士铎 编著

同济大学出版社

(沪)新登字 204 号

内 容 提 要

加强对混凝土基础理论的研究,对发展土木建筑学科、多快好省地进行基本建设具有十分重要的意义。本书对现代最主要的几种混凝土理论加以综合、评析,使读者能了解这些理论的内涵及发展动向,并对实践予以指导。全书分钢筋混凝土变形与刚度理论、裂缝理论、预应力混凝土理论、部分预应力混凝土理论、徐变理论、可靠度设计理论等章节,主要读者是土建部门的工程设计人员、技术人员及有关大专院校师生。

责任编辑 黄国新
封面设计 王肖生

现代混凝土基础理论

张士铎 编著

同济大学出版社	出版
新华书店上海发行所	发行
常熟文化印刷厂	印刷

开本: 850×1166 1/32 印张: 4.875 字数: 130 千字

1994 年 11 月第 1 版 1994 年 11 月第 1 次印刷

印数: 1—1200 定价: 9.00 元

ISBN7-5608-1402-6/TU·147

前 言

为了加强土建专业研究生的基础理论,我们开设了“钢筋混凝土及预应力混凝土技术基础理论”课。这门课共36学时,同学们学完之后,对钢筋混凝土与预应力混凝土的基础理论知识将得到加强,为今后科研与生产实践打下较牢固的理论基础。本课程开设已经多年,原教材使用,反映良好,本书是在原教材基础上编写而成的。全书包括六章:一、钢筋混凝土受弯构件的变形及刚度;二、混凝土裂缝理论;三、预应力混凝土理论;四、部分预应力混凝土理论;五、混凝土徐变理论;六、结构可靠度理论。本书中,注意从理论上提挈与阐释;只要思路得以衔接,尽量避免公式的繁冗演绎;每章之后有小结,并对有关领域提出研究方向。故本书既是教材,又是一本理论专著。

本人学术水平有限,错误与不当之处在所难免,希望同行们能提出宝贵意见,以便修改与完善。本书又承蒙出版社洪建华、黄国新两位老师精心校核,并提出许多宝贵的修改意见与建议,在出书过程中,还得到同济大学桥梁工程系领导的大力支持,在此一并深表谢意。

张士铎

同济园

1993年9月

目 录

第一章 钢筋混凝土受弯构件的变形与刚度

第一节 受弯构件短期荷载作用下变形与刚度	1
1.1 受弯构件变形性质的研究	1
1.2 短期荷载作用下梁的变形理论	3
1.3 忽略拉应力区混凝土影响的短期荷载作用下变形的计算理论	4
1.4 穆拉谢夫及其改进法(或称解析刚度法)	9
1.5 伯莱逊 (Branson) 的有效惯矩法	14
1.6 等效拉力法	15
1.7 短期荷载作用下变形计算小结	17
第二节 长期荷载作用下受弯构件的变形及刚度	18
2.1 概述	18
2.2 时随系数法	19
2.3 长期刚度参数修正法	23
2.4 按变弹性模量计算长期变形(或挠度)	25
2.5 “ λ ”法	25
2.6 小结	26
2.7 对变形与刚度问题的展望	27

第二章 混凝土裂缝理论

2.1 裂缝产生的原因	28
2.2 受载后的裂缝	30
2.3 裂缝发生机理	32

2.4	短期荷载作用下的裂缝计算理论	35
2.5	塔瘦短期有滑移理论公式	43
2.6	长期裂缝理论	44
2.7	裂缝研究的动向	45

第三章 预应力混凝土理论

3.1	预应力的基本概念	48
3.2	预应力混凝土梁的受力状态	49
3.3	等效荷载与林同炎(T.Y.Lin)的平衡理论	52
3.4	弹性应力法及马涅耳图解法的应用	56
3.5	预拉预压混凝土梁的设计与示例	59
3.6	预弯预应力混凝土梁的介绍	65
3.7	预应力混凝土的发展与展望	71

第四章 部分预应力混凝土理论

4.1	部分预应力混凝土的发展与优越性	74
4.2	混凝土结构物的分类	76
4.3	部分预应力混凝土受弯构件的工作状态	78
4.4	预应力度定义及表达方式	80
4.5	突降现象及最小配筋率	82
4.6	名义拉应力法	86
4.7	部分预应力混凝土受弯构件挠度计算	90
4.8	部分预应力混凝土的展望	93

第五章 混凝土徐变理论

5.1	概述	95
5.2	几种徐变理论	95
5.3	徐变系数及收缩系数	103
5.4	混凝土徐变应变与变形的计算	108

5.5	代换棱柱法.....	110
5.6	徐变研究的新动向.....	120

第六章 结构可靠度理论

6.1	概述.....	122
6.2	工程概率术语.....	125
6.3	可靠度常用的几种概率分布.....	130
6.4	中心点法.....	134
6.5	验算点法.....	137
6.6	误差传递公式.....	140
6.7	用验算点法求可靠度指标的示例.....	141
6.8	工程极限状态的分类.....	143
6.9	对可靠度理论的几点探讨与展望.....	144

第一章 钢筋混凝土受弯构件的 变形与刚度

钢筋混凝土构件的变形，包括短期与长期变形两种。近年来由于装配构件的采用，以及高强轻质材料的应用，要求更精确地计算钢筋混凝土构件的变形。特别桥梁结构承受较强的动载，在跨径上更显示变形计算的重要性。与变形计算密切相关的裂缝理论、钢筋与混凝土粘结理论、混凝土的收缩徐变均涉及到变形的发展。本章主要介绍钢筋混凝土受弯构件变形的性质、弯矩-曲率曲线的量测方法及特征、短期荷载作用下变形的计算理论以及长期荷载作用下受弯构件的变形计算方法，最后对有关公式计算结果进行对比与评述

第一节 受弯构件短期荷载作用下 变形与刚度

1.1 受弯构件变形性质的研究

了解受弯构件变形的性质，主要是弄清楚弯矩-曲率 ($M-\varphi$) 变化曲线。钢筋混凝土受弯构件是由复合材料组成的，其变形的特征与裂缝开展的机理以及钢筋与混凝土之间粘结应力的分布规律有非常紧密的联系。在长期荷载作用下它又与混凝土的收缩徐变有密切关联。因此受弯构件变形牵涉的面比较广，也相当复杂，对它的研究非常重要。

对受弯构件曲率量测方法通常不外两种：

1.1.1 曲率仪法

此法的前提是认为挠曲线是一圆弧，而且变形尺寸相对于结构尺

寸是比较小的。量测结果是在标距 a 内的平均曲率 φ ，其计算公式为：

$$\varphi = \frac{1}{\rho} = \frac{8f}{a^2} \quad (1-1)$$

式中， φ ——平均曲率；

ρ ——圆弧曲线的半径；

a ——标距；

f ——垂度。

1.1.2 应变片法

此法假设量测段的“平均挠曲线”为圆弧，而且平均应变符合平截面假定，故平均曲率计算公式为：

$$\varphi = \frac{1}{\rho} = \frac{\bar{\varepsilon}_R + \bar{\varepsilon}_H}{h_0} \quad (1-2)$$

式中， $\bar{\varepsilon}_H$ ——在区段中混凝土受压边缘的平均应变；

$\bar{\varepsilon}_R$ ——在区段中受拉区钢筋的平均应变；

h_0 ——钢筋形心到梁顶的距离。

一般，这个量测区段通常应取构件的纯弯矩区，避免剪切变形的干扰，参见图 1-1 所示。

图 1-2 所示的三条 $M-\varphi$ 曲线与构件的含筋率有关，I、II、III 三条曲线均有如下特征。

(1) 有较明显可以区分的三个阶段： OA 称为整体工作阶段； AB 为带裂缝的工作阶段； BC 为极限变形阶段。

(2) OA 段表示钢筋混凝土尚未开裂，梁的全截面都参与工作，这时，弯矩-曲率曲线近似地呈直线变化。令梁的刚度 $B = E_n I_n$ ，这里 E_n 是混凝土弹性模量， I_n 是混凝土截面形心的惯矩。在此阶段可按线

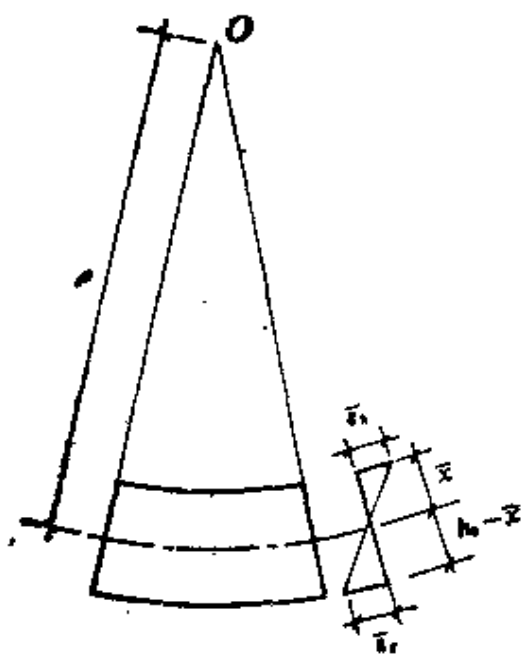


图 1-1 单元应变图

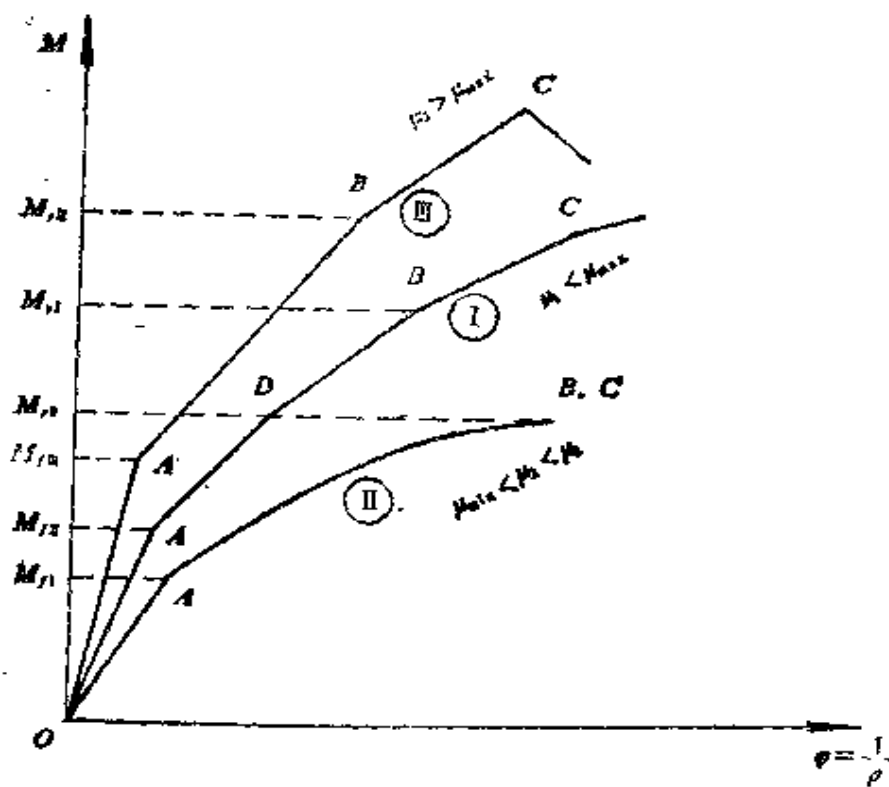


图 1-2 弯矩-曲率曲线

弹性结构来分析其应力与变形(有人认为 $B = 0.85 E_s I_0$, I_0 为换算截面的惯矩)。

(3) AB 段表示钢筋混凝土已经出现裂缝, A 点就是开裂发生点, 弯矩达到开裂弯矩。由于梁有裂缝出现, 梁的刚度发生变化不再是常量, 当然变形也趋向于复杂。但是, DB 段可以近似地认为是一段直线, 这说明在配筋率 $\mu_1 < \mu_{max}$ 加载到达 D 点后, 梁的裂缝发展以及受压区混凝土塑性变形的发展已经基本上趋于稳定。本章讨论的变形属于此阶段的变形, 因为在该阶段受力的梁不能按线性弹性结构计算。

(4) BC 段的 B 点表示屈服点, 即受拉钢筋已经屈服。受压区混凝土的塑性得到充分发挥, 弯矩已经达到极限, 因此, BC 阶段的受力属于结构的延性阶段。

1.2 短期荷载作用下梁的变形理论

本节集中探讨短期荷载作用下梁的变形理论。根据大量的试验表

明,凡属于小变形范围内,对于各种配筋率的矩形截面、T形截面、倒T形截面、箱形截面,其平均应变直到破坏为止均符合平截面假定。影响带裂缝工作阶段的梁在短期荷载作用下变形的主要因素有两个方向:

- (1) 受压区混凝土的塑性变形;
- (2) 受拉区混凝土参加工作的影响。

由于以上两种因素的共同作用,使得带裂缝工作阶段的梁的变形(挠度)与荷载之间的关系呈非线性特征。

所以,在该阶段的计算理论基于下列几个基本假定:

- (1) 上下纤维的平均应变符合平截面假定;
- (2) 忽略剪切变形的影响;
- (3) 在受压区内混凝土各纤维层的应力-应变曲线都认为是相同的(实际上是不相同的);
- (4) 仅从带裂缝工作阶段的变形问题看,裂缝出现之后,钢筋应力有变化。图1-3所示是在两个集中力作用下,钢筋混凝土梁

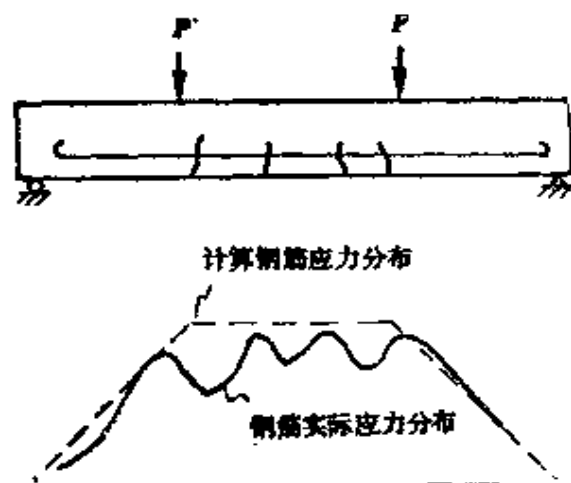


图1-3 裂缝出现后对钢筋应力的影响 一个集中力作用下,钢筋混凝土梁开裂后钢筋实际的应力分布与钢筋计算应力的分布图。

1.3 忽略拉应力区混凝土影响的短期荷载作用下变形的计算理论

本节讨论的情况与实际情况有出入。因为受拉区的混凝土在裂缝之间的区段是参与受力的。这个计算除了上述4个基本假定外,尚需附加两个条件:(1) 受拉区混凝土不参加工作;(2) 要计及受压区混凝土的塑性变形(应力-应变关系曲线已知)。按第一个附加条件,就是说全部受拉区都已经开裂,因此算出的变形比实测为大。

图1-4为不计拉应力区混凝土影响的应变、应力图式,在图中,给

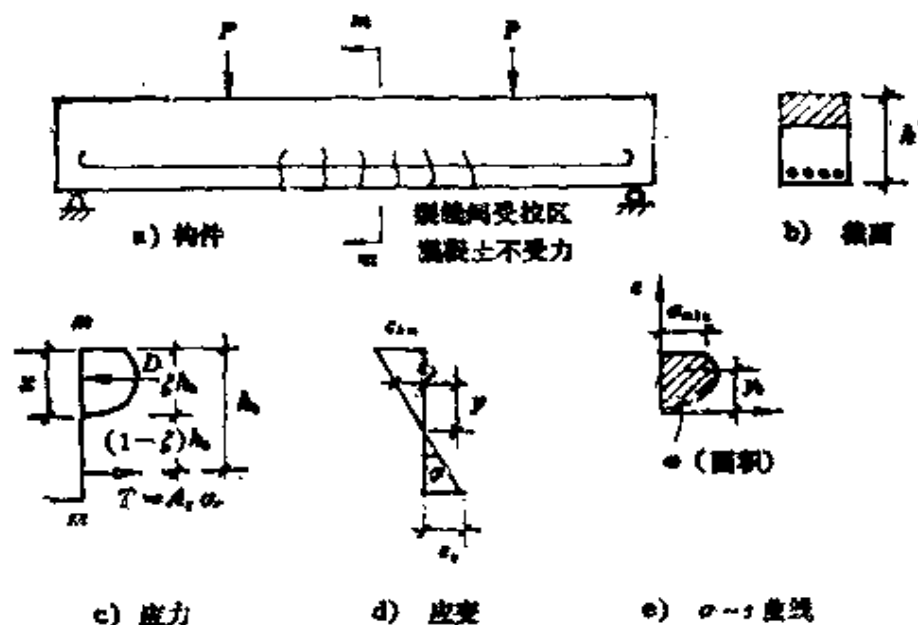


图 1-4

出构件、截面、应力、应变以及应力-应变关系曲线。现用单向配筋的矩形截面梁为例来推导计算公式。

(1) 按平面假定(参见图 1-4d)可列出如下关系式。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \frac{1-\xi}{\xi} \epsilon_{hm} \\ \epsilon_h &= -\frac{\epsilon_{hm}}{\xi h_0} y \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

式中, ϵ_s ——受弯构件受拉区钢筋应变;

ϵ_h ——受弯构件受压区上纤维混凝土压应变;

ξh_0 ——m—m 截面上中和轴距梁顶距离;

$(1-\xi)h_0$ ——m—m 截面上中和轴距受拉钢筋形心距离;

ϵ_{hm} ——m—m 截面上混凝土上纤维压应变;

y ——m—m 截面上中和轴到受压区任一点距离;

h_0 ——m—m 截面上受拉区钢筋形心到梁顶的距离(也称作梁的有效高度)。

(2) 根据虎克定律, 写出下列关系式

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= E_s \varepsilon_s \\ \sigma_h &= E_h \varepsilon_h \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

式中, σ_s ——受弯构件受拉区钢筋应力;

σ_h ——受弯构件受压区上边缘混凝土压应力;

E_s, E_h ——分别为钢筋与混凝土的弹性模量。

(3) 通过内力关系, 得到下列表达式:

$$\text{拉力 } T = \sigma_s \cdot A_s \quad (1-5)$$

$$\text{压力 } D = \int_0^{\xi h_0} b \sigma_h dy \quad (1-6)$$

在 D 的积分表达式中, 将 0 到中和轴距离 ξh_0 换成应变上下限, 即 0 到 ε_{hm} , 同时将 dy 换成 $\frac{\xi h_0}{\varepsilon_{hm}} d\varepsilon_h$, 则压力 D 为

$$\begin{aligned} D &= b \int_0^{\varepsilon_{hm}} \sigma_h \cdot \frac{\xi h_0}{\varepsilon_{hm}} d\varepsilon_h = \frac{\xi b h_0}{\varepsilon_{hm}} \int_0^{\varepsilon_{hm}} \sigma_h d\varepsilon_h \\ &= \frac{\xi b h_0}{\varepsilon_{hm}} \omega = \alpha \cdot b \sigma_{hm} \xi h_0 \end{aligned} \quad (1-6')$$

从图 1-4(e) 中, 得到 $\omega = \int_0^{\varepsilon_{hm}} \sigma_h d\varepsilon_h$, ω 实质上表示混凝土应力-应变曲线所包围的面积。如令 $\alpha = \frac{\omega}{\sigma_{hm} \cdot \varepsilon_{hm}}$, 即表示应力-应变曲线中实际包裹的面积与 $\sigma_{hm} \cdot \varepsilon_{hm}$ 的矩形块面积之比。这在一定程度上反映了混凝土的塑性性质。 α 也称作换算成平均应力的系数。

混凝土压应力合 D 的作用点 y_c 可由下式求得:

$$D \cdot y_c = \int_0^{\xi h_0} y b \sigma_h dy$$

利用式(1-3)及式(1-6'), 通过变量代换后, 简化为

$$y_c = \frac{\int_0^{\xi h_0} y b \sigma_h dy}{D} = \frac{\int_0^{\varepsilon_{hm}} \varepsilon_h \sigma_h d\varepsilon_h (\xi h_0)}{\varepsilon_{hm} \int_0^{\varepsilon_{hm}} \sigma_h d\varepsilon_h} = \gamma \xi h_0 \quad (1-7)$$

(1-7) 式中的参数 γ 为

$$\gamma = \frac{\int_0^{\varepsilon_{hm}} \varepsilon_h \sigma_h d\varepsilon_h}{\varepsilon_{hm} \int_0^{\varepsilon_{hm}} \sigma_h d\varepsilon_h} \quad (1-8)$$

最后从力的平衡条件 $\Sigma H = 0$ 及 $\Sigma M = 0$, 得到

$$\left. \begin{aligned} D &= T = A_g \sigma_g \\ M &= D \cdot y_c + A_g \sigma_g (h_0 - \xi h_0) \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

将(1-4)到(1-8)诸式代入(1-9)式中, 经过整理与简化得到

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_{hm}^2} \int_0^{\varepsilon_{hm}} \sigma_h \cdot d\varepsilon_h &= \frac{A_g}{b h_0} E_g \frac{1-\xi}{\xi^2} = \mu E_g \frac{1-\xi}{\xi^2} \\ \frac{M}{b h_0^2} &= \left(\frac{1}{\varepsilon_{hm}^2} \int_0^{\varepsilon_{hm}} \sigma_h \cdot \varepsilon_h d\varepsilon_h \right) \xi^2 + \mu E_g \frac{(1-\xi)^2}{\xi} \cdot \varepsilon_{hm} \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

式中, M ——弯矩;

b ——矩形截面宽度;

μ ——截面配筋率。

(1-10)式是忽略拉应力区混凝土影响的短期荷载作用下的两个基本公式。显然, 当荷载、截面尺寸及配筋率 $\mu = \frac{A_g}{b h_0}$ 均已知时, (1-10)式给出 ξ (中和轴参数) 和混凝土上纤维压应变 ε_{hm} 的非线性方程组。 ξ 和 ε_{hm} 的数值解可通过电子计算机计算求得, 例如通过截面划分条带或欧洲混凝土学会(CEB)建议的划分条带法, 当 ξ 及 ε_{hm} 已知, 则 $m-m$ 截面上曲率为

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{hm}}{\xi h_0} \quad (1-11)$$

根据上述公式的推导, 有下列几点值得讨论:

(1) 对于纯弯曲的梁, 在上述理论的假定下, 挠曲线具有圆弧外形, 圆弧半径 $\rho = \frac{1}{\varphi}$, 由式(1-10)与式(1-11)能够完全确定挠曲线的方程, 则跨中挠度 f 可以按近似公式计算,

$$f = \frac{1}{8} \varphi l^2 \quad (1-12)$$

式中, φ 为跨中截面的最大曲率;

l 表示梁的计算跨径,

f 表示跨中最大挠度。

(2) 如果受压区混凝土的应力-应变曲线是直线变化, 应力与受压区高度 ξh_0 均能得到解答。对单筋矩形截面, 其应力、受压区高度、曲率得到下列解答:

$$\begin{aligned} \text{混凝土应力} \quad \sigma_h &= E_h \varepsilon_h = \frac{M x}{I_{hg}} \\ \text{钢筋的应力} \quad \sigma_g &= E_g \varepsilon_g; \sigma_g = \frac{n M (h_0 - x)}{I_{hg}} \\ \text{受压区高度} \quad x &= \xi h_0 = \sqrt{(\mu n)^2 + 2n\mu} - \mu n \\ \text{曲率为} \quad \varphi &= \frac{\varepsilon_h}{x} = \frac{\varepsilon_g}{h_0 - x} = \frac{\sigma_g}{E_g (h_0 - x)} = \frac{M}{E_g A_g \eta h_0 (h_0 - x)} \end{aligned} \quad (1-13)$$

上列诸式中 I_{hg} 是不考虑混凝土受拉区(开裂状态)截面的换算惯性矩, 对于单筋矩形截面

$$I_{hg} = \frac{bx^3}{3} + nA_g(h_0 - x)^2;$$

式中, μ ——受拉钢筋配筋率 $\left(\frac{A_g}{bh_0}\right)$;

η ——表示内力臂的系数;

n ——钢筋弹性模量与混凝土弹性模量比值。

上述诸式按应力-应变关系呈直线变化, 是在结构设计原理中按容许应力阶段计算理论导演的基本公式。其受力图式如图 1-5 所示。

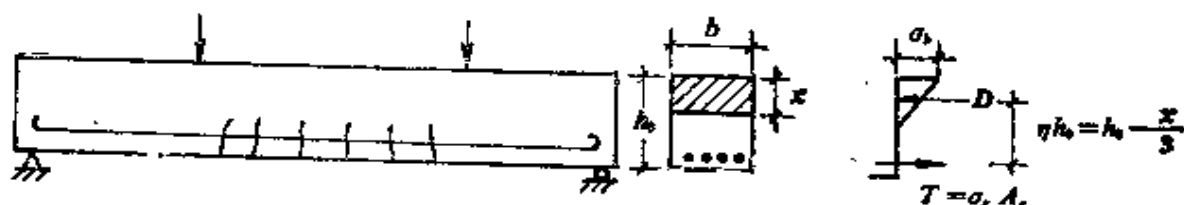


图 1-5 单筋矩形截面受力图式 σ - ε 按直线变化

(1-13) 式是按开裂截面计算的曲率公式。用它求出的变形要比实际大, 这是因为不计受拉区混凝土的作用, 而将全部梁的带裂缝的受拉

区视为全部开裂的结果。

(3) 对于挠曲构件(挠曲线非圆弧), 各截面的曲率 φ' 也不相同。为了求得结构的挠曲线, 可以假定曲率每一小段内均呈线性变化, 将结构划分为 m 个小段, 用电子计算机求得。但作为简化计算, 也可以近似地采用下式计算跨中挠度。

$$f = k\varphi_0 l^2 \quad (1-14)$$

(1-14) 式中, k 是与挠曲线形状有关的待定常数, 它与加载方式、支承条件均有关, 可以由试验确定。 φ_0 是跨中截面最大的平均曲率, l 为计算跨径。

在简支梁中, 跨中求得的曲率为 φ_0 , 支点处曲率为 φ_1 , 而且等于零, 其曲率如按抛物线变化, 则

$$f = \frac{1}{9.6} \varphi_0 l^2 \quad (1-15)$$

如果跨中曲率为 φ_0 , 支点处为 φ_1 , 其间曲率按二次抛物线变化, 则简支梁挠度为

$$f = \frac{l^2}{48} (\varphi_0 + 5\varphi_1) \quad (1-16)$$

如上所述, 如果曲率为直线变化, 则挠度为

$$f = \frac{l^2}{24} (\varphi_0 + 2\varphi_1) \quad (1-17)$$

本节所讨论内容可参见本章参考文献[1]。

1.4 穆拉谢夫及其改进法(或称解析刚度法)

上述介绍是不计混凝土受拉区的作用, 只考虑了受压区混凝土的非线性影响, 当然与实际情况仍存在较大的差异。为了同时考虑受压区混凝土的非线性影响和受拉区混凝土参加工作, 前苏联穆拉谢夫教授做了如下几点基本假定:

(1) 同时考虑受拉区混凝土参与工作和受压区混凝土的非线性影响。

(2) 仍然采用初等梁理论的几何关系。

$$\varphi = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{B}$$

式中, φ 为截面曲率; ρ 为半径; M 为弯矩; B 为平均刚度见式(1-18)。

(3) 在裂缝发生的截面处建立平衡条件, 参考图 1-6 进行计算公式的导演。

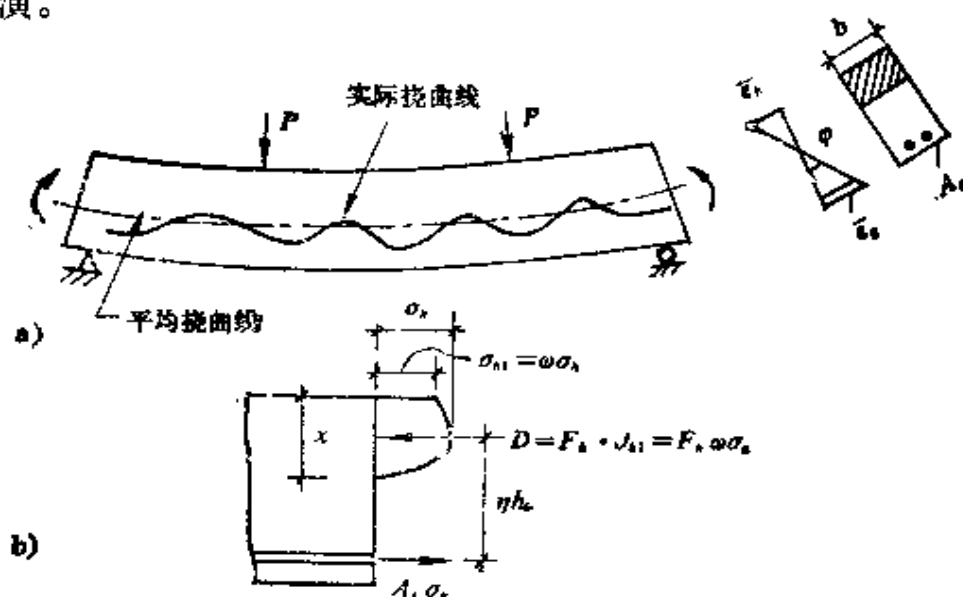


图 1-6 变形、平均应变及应力图式

平均曲率如式(1-2) $\varphi = \frac{1}{\rho} = \frac{\bar{\varepsilon}_h + \bar{\varepsilon}_s}{h_0}$

平均刚度 $B = \frac{M}{\varphi} = \frac{M h_0}{\bar{\varepsilon}_h + \bar{\varepsilon}_s}$ (1-18)

钢筋平均应变 $\bar{\varepsilon}_s = \psi_s \varepsilon_s = \psi_s \frac{\sigma_s}{E_s}$ (1-19)

混凝土平均应变 $\bar{\varepsilon}_h = \psi_h \varepsilon_h = \psi_h \frac{\sigma_{h1}}{E'_h}$ (1-20)

上述诸式中 σ_{h1} 是将混凝土曲线的应力图式换算成矩形分布的应力值。 ψ_s 、 ψ_h 分别为钢筋与混凝土的不均匀系数。即

$$\psi_s = \frac{\bar{\varepsilon}_s}{\varepsilon_s} = \frac{\bar{\sigma}_s}{\sigma_s}; \quad \psi_h = \frac{\bar{\varepsilon}_h}{\varepsilon_h}$$

这里, σ_s , ε_s , σ_{h1} , ε_h 分别表示裂缝截面处钢筋与混凝土的应力与应变。根据基本假定 1 的第 2 个内容, 考虑混凝土的非线性要用 E_h 代替 E'_h 而 $E'_h = \gamma E_h$, 这里 γ 为反映受压区混凝土塑性变形影响的参数。

从图 1-6(b) 中, 根据平衡条件则有

$$\sigma_s = \frac{M}{W_s} \quad W_s = A_s \eta h_0 \quad (1-21)$$

$$\sigma_{h1} = \frac{M}{W_h} \quad W_h = F_h \eta h_0 \quad (1-22)$$

式中, A_s, F_h ——分别为钢筋与受压混凝土面积;

W_s, W_h ——分别为对钢筋形心与混凝土形心的截面模量;

ηh_0 ——内力臂;

E'_h ——反映混凝土塑性的弹性模量。

现将(1-19)~(1-22)诸式代入(1-18)式中, 化简后得到:

$$B = \frac{\eta h_0^2}{\frac{\psi_s}{E_s A_s} + \frac{\psi_h}{\omega \gamma E'_h F_h}} \quad (1-23)$$

式中, ω ——应力图形的丰满程度系数, 一般 $\omega \leq 1$ 。混凝土截面上的最大应力 σ_h 并不发生在梁顶, 而在梁顶靠下部位, 而应力分布图形为抛物线型。如果中性轴 x 不变, 其应力的图形的面积换算成矩形时, 梁顶 σ_{h1} 应力等于 $\omega \sigma_h$, 这个小于 1 的系数 ω 称为应力图形的丰满程度系数。

在(1-23)式中, 当 $\omega = 1.0$, 就是前苏联设计规范中建议公式。它是以钢筋和受压边缘混凝土平均应变表示刚度的基本表达式。

事实上, (1-23)式中 ψ_h, ω, γ 的确定是比较困难的。

如果将(1-23)式作如下变换, 则有

$$B = \frac{\eta h_0^2}{\frac{\psi_s}{E_s A_s} + \frac{\psi_h}{\omega \gamma E'_h F_h}} = \frac{E_s A_s h_0^2}{\frac{\psi_s}{\eta} + \frac{E_s A_s \psi_h}{E_h F_h \omega \gamma \eta}}$$

因为 $\frac{E_s}{E_h} = \eta$, 混凝土受压区面积 $F_h = x \cdot b = \xi h_0 b$, 同时 $\frac{A_s}{b h_0}$ 为配筋率 μ , 将这些关系代入 B 的表达式中分母第二项, 则 B 进一步简化为:

$$B = \frac{E_s A_s h_0^2}{\frac{\psi_s}{\eta} + \frac{\eta \mu \psi_h}{\omega \cdot \gamma \cdot \eta \xi}}$$

如果再令 $\psi_s = \psi$, $\xi = \frac{\gamma\eta\omega\xi}{\psi_h}$, 则

$$B = \frac{E_s A_s h_0^2}{\frac{\psi}{\eta} + \frac{n\mu}{\xi}} \quad (1-24)$$

(1-24)式是我国工民建钢筋混凝土结构设计规范(TJ10-74)计算刚度 B 的公式模式, 改进之处在于通过试验的统计分析得到较为笼统的参数 ψ , η , ξ , 因此不需要确定中和轴 ξh_0 。(1-23)式和(1-24)式都是基于穆拉谢夫的基本假定和思路推导的。由于(1-23)式的推演尚不够严格, 故(1-24)的结果使理论上存在的缺点得到弥补。

根据以上的推导, 做如下几点探讨:

1.4.1 矩形截面

根据天津大学等三校合编《钢筋混凝土结构, (上册)》(见本章参考文献[2])对矩形截面, ψ , η , ξ 分别按下列公式确定:

(1) $\psi = 1.2 \left(1 - \frac{M_{yf}}{M} \right) = 1.2 \left(1 - \frac{0.235bh^2R_t}{M} \right)$, 这里 $\psi \geq 0.4$, 但同时 ψ 还要 ≤ 1.0 ; M_{yf} 表示开裂弯矩; M 表示作用荷载引起的最不利截面的弯矩; R_t 为抗拉极限强度; b 为梁宽; h 为梁高。

(2) 内力臂系数 $\eta = 1 - 0.4\sqrt{n\mu}$, 或 η 取 0.87。

(3) 受压区混凝土综合系数 ξ

$$\begin{aligned} \text{混凝土平均应变 } \bar{\epsilon}_h &= \psi_h \frac{\sigma_h}{\gamma E_h} = \frac{\psi_h M}{\gamma E_h \omega F_h \eta h_0} \\ &= \frac{M}{\frac{\eta \gamma \omega \xi}{\psi_h} E_h b h_0^2} \end{aligned}$$

由于 $\xi = \frac{\eta \gamma \omega \xi}{\psi_h}$, 故 $\xi = \frac{M}{\bar{\epsilon}_h E_h b h_0^2}$

当 M 已知, E_h , $b h_0^2$ 都已给出, 通过测定 $\bar{\epsilon}_h$ 可从上式中得 ξ

对于 $\frac{n\mu}{\xi} = 0.2 + 6n\mu$, 以及对于 T 形及倒 T 形在参考文献[2]中也给出 ψ , η , ξ 相应计算公式, 最后 TJ10-74 规范给出下列计算公式(适应于矩形, T 形及倒 T 形截面)

$$B = \frac{E_s A_s h_0^3}{1.15\psi + \frac{0.2 + 6n\mu}{1 + 2\gamma'}} \quad (1-25)^*$$

$$\psi = 1.2 \left[1 - \frac{0.235(1 + 2\gamma_1 + 0.4\gamma'_1) R_t b h^2}{M} \right] \quad (1-26)$$

式中, ψ ——裂缝间纵向受拉钢筋应变不均匀系数, 当 $\psi < 0.4$ 时, 取 $\psi = 0.4$, 当 $\psi > 1.0$ 时, 取 $\psi = 1.0$ 。对直接承受重复荷载的构件, 同样取 $\psi = 1.0$;

E_s ——钢筋的弹性模量;

n ——钢筋弹性模量与混凝土弹性模量比值;

μ ——纵向受拉钢筋配筋率, $\mu = \frac{A_s}{bh_0}$;

h ——梁高;

$\gamma_1 = \frac{(b_t - b)h_t}{bh}$, 其中 b_t , h_t 分别为受拉区翼缘宽度及高度;

$\gamma'_1 = \frac{(b'_t - b)h'_t}{bh}$, 其中 b'_t , h'_t 分别为受压区的翼缘宽度及高度;

$\gamma' = \frac{(b_t - b)h'_t}{bh_0}$ 当 $h'_t > 0.2h_0$ 时, γ' 计算时采用 $h'_t = 0.2h_0$ 。

对于矩形截面 $\gamma'_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma' = 0$ 。

1.4.2 最小刚度法

有人建议, 计算挠度时可以采用“最小刚度原则”。即用最小刚度代替结构的抗弯刚度 EI , 然后用结构力学方法计算变形。将最小刚度法的计算结果与实测值相比, 对于纯弯构件, 计算值大于实测值, 这是因为采用 B_{min} 的缘故; 对于剪

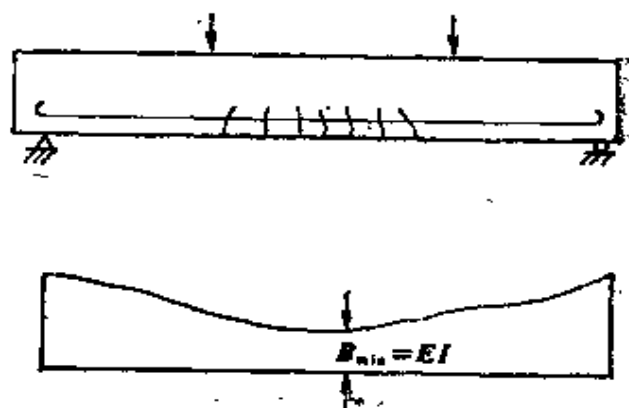


图 1-7 B (刚度)的变化图

切变形较大或者剪切裂缝很多的构件, 计算结果又小于实测值, 这是

• 在规范 GBJ10-89 中 B 的表达式分母调整为 $1.15\psi + 0.2 + \frac{6n\mu}{1 + 3.5\gamma_1}$

因为忽略了剪切变形或剪切裂缝降低了结构刚度所致。

事实上, 构件刚度 B 随 M 的增大而减小, 又随 $\eta\mu$ 的增加而减小, 但随着 h_0 的增大而增大。对于实际结构, 配筋 $\eta\mu$ 和弯矩都沿着跨径方向变化, 因此刚度 B 也沿着跨径方向变化, 见图 1-7 所示。最小刚度法是一种近似计算方法。更多的讨论见本章参考文献[3]。

1.5 伯莱逊(Branson)的有效惯矩法

美国衣阿华大学伯莱逊(D. E. Branson)教授提出的有效惯矩法已被美国混凝土学会 (ACI) 接受纳入规范。随后, 美国公路桥梁规范 (AASHTO) 1973 版和 1978 版也先后推荐该法。1977 年加拿大房屋建筑规范也采纳该法。该法的基本原理是取刚度 $B = E_s I_e$, I_e 称为有效惯矩。根据统计资料求出 $I_e - M$ 的曲线, 并化为无量纲, 然后用结构力学方法计算结构位移。图 1-8 表示 I_e 的取法。

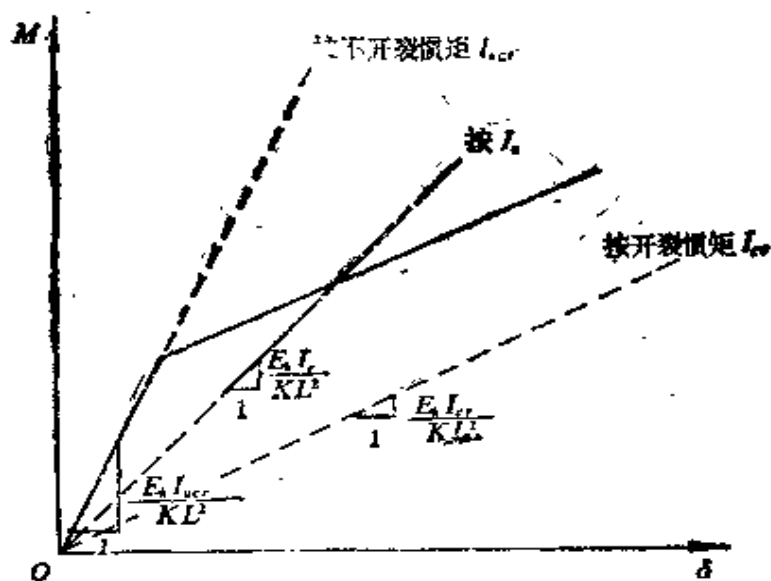


图 1-8 $M-\delta$ 图中 I_e 的取法

当 $M \geq M_{cr}$ 时, 经验公式为:

$$I_e = I_{ucr} - (I_{ucr} - I_{cr}) \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^n \right] \quad (1-27)$$

式中, I_e ——有效惯矩;

I_{ur} ——未开裂截面的换算惯矩;

I_{cr} ——开裂截面的换算惯矩;

M_{cr} ——开裂弯矩;

M ——使用荷载作用下的弯矩;

m ——指示, 对钢筋混凝土 $m=3$ 。

很明显, 当 $M = M_{cr}$ 时, $I_e = I_{ucr}$ 。若 M 超过 M_{cr} 很多, 则 $I_e = I_{cr}$ 。(1-27) 式缺乏对影响带裂缝刚度因素的分析, 同时不能经常很好地符合试验结果。但日前美国 ACI 规范中仍建议采用此法。伯莱逊还继续将 I_e 有效惯矩法推广到部分预应力混凝土构件中去。

1.6 等效拉力法

等效拉力法是在不考虑混凝土受拉的计算方法的基础上, 引进裂缝间混凝土受拉这一因素的作用来修正刚度, 然后按结构力学的方法解出变形。

如图 1-9 所示, 假设裂缝之间截面的混凝土应力分布成折线状。从平衡条件得到:

$$T' = \frac{1}{2} K_1 \sigma_r (h - \xi h_0) b \quad (1-28)$$

式中, T' ——混凝土承担的拉力;

K_1 ——比例系数;

σ_r ——混凝土折弯模量(混凝土弯曲抗拉极限强度);

h ——梁高;

b ——梁宽;

ξh_0 ——中性轴距梁顶距离。

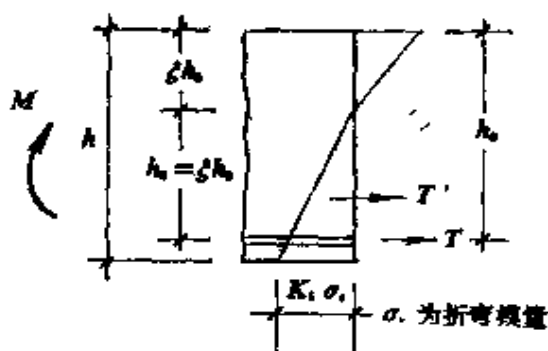


图 1-9 混凝土拉力 T' 的计算图式

$$T' \text{ 引起的截面的弯矩 } M'' = T' \cdot \frac{2}{3} h = \frac{1}{3} K_1 \sigma_r b h (h - \xi h_0)$$

(1-29)

如果将混凝土拉应力折算为钢筋拉应力 σ_s , 相应受拉区混凝土的

抵抗力矩为 M'' , 则

$$\sigma_s'' = -\frac{M''}{A_s \eta h_0} = -\frac{M''}{\mu \eta b h_0^2} \quad (1-30)$$

式中, σ_s'' ——折算拉应力;

M'' ——相应于受拉区混凝土抵抗力矩;

ηh_0 ——内力臂;

h_0 ——梁的有效高度;

A_s ——受拉钢筋截面面积。

在发生裂缝的截面, $\sigma_s = \frac{M}{\mu \eta b h_0^2}$, 故钢筋的平均应力 $\bar{\sigma}_s$ 为

$$\bar{\sigma}_s = \sigma_s - \sigma_s'' = \frac{M - M''}{\mu \eta b h_0^2} \quad (1-31)$$

式中, $\bar{\sigma}_s$ ——钢筋的平均应力;

σ_s ——开裂截面钢筋的应力;

σ_s'' ——未开裂面混凝土拉应力折算成钢筋应力;

M ——外荷载引起的弯矩;

μ ——配筋率 $\left(\frac{A_s}{b h_0}\right)$ 。

$$\begin{aligned} \text{曲率: } \varphi &= \frac{1}{\rho} = \frac{\bar{\sigma}_s}{E_s (h_0 - \xi h_0)} = \frac{M - M''}{\mu \eta b h_0^2 E_s (h_0 - \xi h_0)} \\ &= \frac{M}{E_s \left(\frac{n A_s h_0^2 (1 - \xi) \eta}{1 - \frac{M''}{M}} \right)} \end{aligned} \quad (1-32)$$

式中, φ ——截面曲率;

\bar{I} ——截面平均惯矩, 等于 $\frac{\eta A_s h_0^2 (1 - \xi) \eta}{1 - \frac{M''}{M}}$;

ρ ——曲率半径;

$\frac{\bar{\sigma}_s}{E_s}$ ——钢筋平均应变;

n ——钢筋弹性模量与混凝土弹性模量的比值。

M'' 根据 62 根试验梁, $M'' = bM_1$, $M_1 = 0.1f'_c \frac{2}{3} \cdot h(h - \xi h_0)$, 这里 f'_c 为圆柱体极限抗压强度 (约等于 $0.85R$, R 为 $20\text{cm} \times 20\text{cm} \times 20\text{cm}$ 立方体强度)

另外, 等效拉力法也是从分析影响带裂缝段构件刚度的主要因素出发的, 只是考虑的途径不同而已。有效拉力法也具有下述两个缺点: (1) 取决于应力 $K_1\sigma_r$, 此应力与荷载产生的内力无关; (2) 有效拉力及其受拉区中的分布状态与混凝土应变完全脱离关系。英国目前 CP-110 规范的变形计算方法就是根据等效应力的原则建立起来的。

1.7 短期荷载作用下变形计算小结

总的说来, 短期荷载作用下受弯构件变形计算理论可以分为两大类:

1.7.1 曲率法

不考虑受拉区混凝土工作的计算方法是属于这一类。它的特点是: 直接求解曲率与荷载关系 (这时不一定要求 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{B}$), 用数值计算 (或近似计算) 方法求解变形 (挠度)。

1.7.2 刚度法

包括:

- (1) 解析刚度法——我国 TJ 10-74 规范及前苏联建筑规范沿用;
- (2) 有效惯矩法——美国 ACI 规范沿用;
- (3) 等效拉力法——英国 CP-110 规范沿用。

刚度法特点是: (1) 用变形刚度 B (或用有效惯矩) 代替线弹性结构的抗弯刚度 EI_0 , 然后利用结构力学方法计算变形 (挠度); (2) 采用线弹性结构的几何关系 $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{B}$; (3) 对于超静定结构, 由于刚度 B 与荷载 M 有关, 内力的求解方程是非线性的, 通常要用电子计算机来求得解答。

但是, 以上这两类方法有一个共同缺点, 就是应力分析按非线性分

析,而内力分析又按弹性分析。从理论上讲,应力分析方法与内力分析方法不一致,处于矛盾状态。

第二节 长期荷载作用下受弯构件的变形及刚度

2.1 概述

在长期荷载作用下,受弯构件的变形随时间增长,截面中和轴下移,受拉区钢筋应力略有增加,变形也随之增加,其原因从理论上分析有以下三个方面:

- (1) 混凝土徐变的影响使变形继续增加;
- (2) 混凝土收缩变形的影响;
- (3) 受拉区钢筋滑移,部分受拉混凝土退出工作,裂缝继续发展。

从材料、构件工作环境以及加载形式的角度分析,影响长期变形的主要因素为:

- (1) 混凝土配合比、水灰比及骨料性质等;
- (2) 构件受载龄期、荷载形式、工作环境(包括温度、湿度、腐蚀性等);
- (3) 钢筋表面性质、直径及配筋率;
- (4) 截面形式。

长期变形的分析方法可分为两大类:

第一类方法是根据影响长期变形的主要因素,将长期变形系数 $\theta = \frac{f_o}{f_a}$; 式中 f_o , f_a 分别为长期和短期变形(挠度),但 θ 是若干参数的函数,因此 θ 可以表示为:

$$\theta = f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$$

如果 λ_1 表示某个主要因素(例如混凝土的加载龄期)对长期变形的影响,通过试验用数理统计方法可以求出 $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$ 的表达式。这种方法需要进行大幅度试验,避免不了要消耗大量资金。

第二类方法即因素分析法。它是从理论分析入手,按试验论证做

出一些合乎逻辑的基本假定, 得出解析表达式, 利用试验待定部分参数。理论推导主要是奠定数学表达模式, 试验或量纲分析主要确定一些参数。这样, 解决长期变形, 既有理论又有试验, 说服力较强。

2.2 时随系数法

当混凝土发生收缩与徐变, 短期荷载作用下产生的变形或挠度随着时间的增长而继续加大。时随系数法就是用 K_r (或其他表示符号) 系数来考虑长期荷载作用下的增长大小, K_r 是时间 t 的函数。收缩与徐变是长期荷载作用下影响变形的最主要原因, 一般计算随时间增加的变形应该考虑混凝土收缩与徐变的相互影响, 但对钢筋混凝土构件, 这种相互影响可以不计, 这样将徐变与收缩分别处理, 使计算简化。

2.2.1 徐变曲率

基本假定:

- 不计混凝土徐变与收缩变形的相互影响;
- 截面发生徐变后, 应变仍服从平截面假定;
- 不计钢筋滑移影响。

基本公式: 参考图 1-10 所示, 得到

$$\varphi_0 + \varphi_s = \frac{\varepsilon_{h0} + \varepsilon_{hs}}{\xi_s h_0} \quad (1-33)$$

$$\varphi_0 = \frac{\varepsilon_{h0}}{\xi_0 h_0} \quad (1-34)$$

$$\frac{\varphi_s}{\varphi_0} = K_r \frac{\varepsilon_{hs}}{\varepsilon_{h0}} \quad (1-35)$$

$$K_r = -\frac{\xi_0}{\xi_s} + \left(-\frac{\xi_0 - \xi_s}{\xi_s} \right) \frac{\varepsilon_{h0}}{\varepsilon_{hs}} \quad (1-36)$$

上列式中

ξ_0, ξ_s ——分别为短期荷载和长期荷载作用下受压区高度系数;

ε_{h0} ——短期荷载作用下, 混凝土受压边缘应变;

ε_{hs} ——长期荷载作用下, 混凝土受压边缘应变(可按徐变理论计算)。

ε_s 综合反映了受压区混凝土徐变, 受拉区混凝土徐变以及受压区钢筋对混凝土的徐变影响。 ε_{sh0} , ε_{sh} 也反映了混凝土受载的龄期等因素的影响。因此 K_r 反映了徐变的综合影响。 K_r 值可以由试验求得。

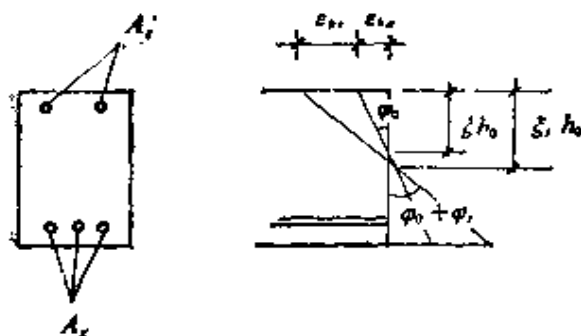


图 1-10 矩形截面长期应变及曲率

下面介绍两个推荐公式去计算 K_r :

(1) ACI-318-71 公式: $K_r = 1 - 0.6 \frac{A'_s}{A_g}$ (1-37)

(2) 伯莱逊(Branson)公式: $K_r = \frac{1}{1 + 50\mu'}$; $\mu' = \frac{A'_s}{bh_0}$ (1-38)

综合上述 ACI 公式中 K_r 系数仅反映了受压区钢筋面积 (A'_s) 与受拉钢筋面积 (A_g) 的比值。当 $A'_s = 0$ 时 $K_r = 1.0$ 。而伯莱逊公式中 K_r 不仅与 A'_s 有关而且与混凝土截面面积有关, 似与 A_g 无关。显然, 混凝土的徐变与混凝土面积有关是合理的, 而且实践证明, 伯莱逊建议的表达式与试验结果符合较好。

2.2.2 收缩曲率

假想一偏心力 T_{sh} , 作用在受拉钢筋形心处, 产生的拉应变, 恰恰等于该处由于混凝土收缩产生的压应变, 那么我们就可以求出收缩曲率 φ_{sh0} 。

已知 ε_{sh} 是纯混凝土收缩应变, 它与时间 t 有关。如图 1-11 所示。

从图 1-11(b), 得 $T_{sh} = (A_g + A'_s) \cdot \varepsilon_{sh1} E_s$ (1-39)

由图 1-11(c), 得 $\varphi_s = -\frac{M}{E_s I} = \frac{T_{sh} \cdot e}{E_s I}$ (1-40)

式中, T_{sh} ——假想的偏心拉力(未知数);

ε_{sh1} ——截面形心处的收缩应变(未知数);

M ——截面假想弯矩等于 $T_{sh} \cdot e$, e 为偏心距(已知);

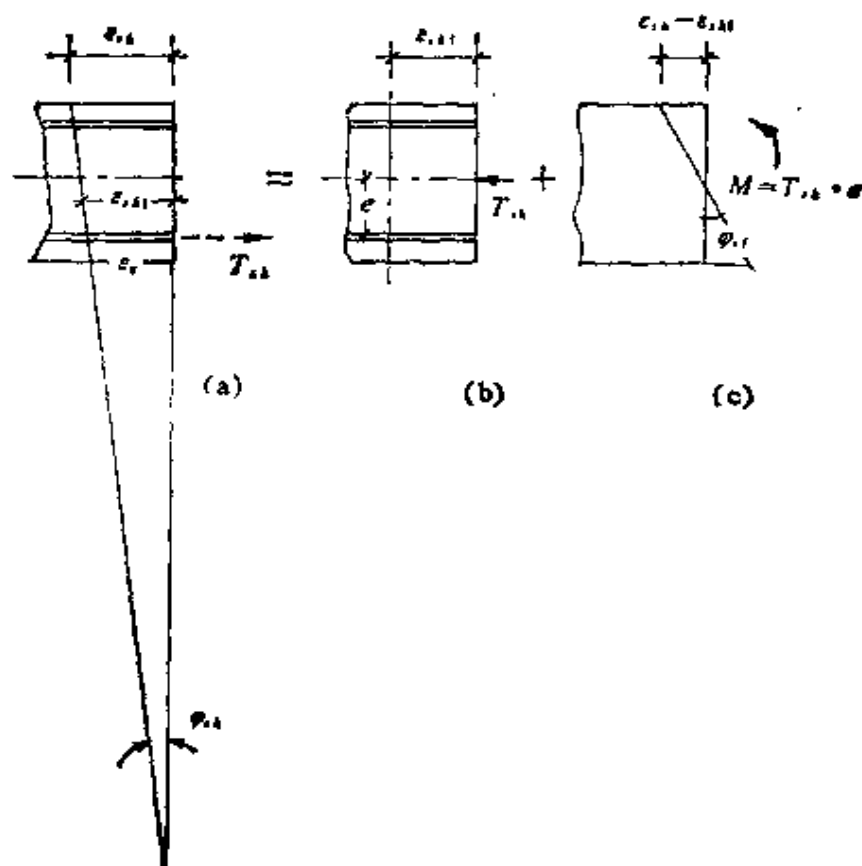


图 1-11 收缩应变及曲率

A_s, A'_s ——分别为受拉区与受压区钢筋截面面积(已知);

E_s, E_c ——分别为钢筋与混凝土的弹性模量;

I ——混凝土截面惯性矩。

从前两式中 ϵ_{sh} 已知, 可以解出 T_{sh} 与 ϵ_{sh1} 。从而得到由于收缩应变为 ϵ_{sh} 时受拉区钢筋的应变 ϵ_s 。 ϵ_{sh} 及 ϵ_s 已知, 则

$$\varphi_{sh}(\text{收缩曲率}) = \frac{\epsilon_{sh} - \epsilon_s}{h_0}$$

其他一些经验表达式

$$\varphi_{sh} = \frac{\epsilon_{sh}}{h_0} \left(1 - \frac{\epsilon_s}{\epsilon_{sh}} \right); \quad \epsilon_{sh} = \left[1 - \frac{(1.2\sqrt{t} + t)t}{1 + 4t + t^2} \right] \epsilon_K \quad (1-41)$$

这里, $\epsilon_K = 200 \times 10^{-6}$ (混凝土收缩应变终值);

t ——时间以月计;

伯莱逊公式

$$\varphi_{sh} = 0.7 \frac{\varepsilon_{sh}}{h} (u - u')^{\frac{1}{3}} \left(\frac{u - u'}{u} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (1-42)$$

式中, u ——受拉钢筋配筋率 $\frac{A_s}{bh_0}$;

u' ——受压钢筋配筋率 $\frac{A'_s}{bh_0}$;

ε_{sh} ——纯混凝土时间为 t 的收缩应变(已知);

φ_{sh} ——收缩曲率。

$$\text{收缩曲率统一表达式为 } \varphi_{sh} = \frac{\varepsilon_{sh}}{h_0} A_{sh} \quad (1-43)$$

式中, h_0 ——有效梁高;

ε_{sh} ——收缩变形(不配筋的素混凝土)在时间 t 的应变;

A_{sh} ——综合参数。

用假想偏心力的方法,当梁高大,配筋率较大,偏差较大,这说明平截面假定已不适用。

2.2.3 按时随系数法计算长期变形的实用方法

如果混凝土徐变率表示单位应力的徐变应变,则

$$C_{st} = \frac{\varepsilon_{hs}}{\sigma_h} \quad (1-44)$$

式中, C_{st} ——单位应力的徐变应变;

σ_h ——混凝土的应力;

ε_{hs} ——混凝土徐变应变;

ε_{h0} ——混凝土弹性应变。

而且混凝土徐变系数定义为 $\frac{\varepsilon_{hs}}{\varepsilon_{h0}} \left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_0} \right)$ 徐变应变与弹性应变的比值,则

$$\varphi_{(t, \tau)} = E_h \cdot C_{st} \quad (1-45)$$

式中, $\varphi_{(t, \tau)}$ ——徐变系数;

C_{st} ——徐变率;

E_h ——混凝土弹性模量。

$$\text{从(1-35)式} \quad \frac{\varphi_s}{\varphi_0} = K_r \frac{\varepsilon_{hs}}{\varepsilon_{h0}} = K_r \cdot E_h C_{s1} \quad (1-46)$$

假定受弯构件的变形计算公式为(1-14)式

$$f_e = k \varphi_0 l^2 \quad (1-14)$$

式中, k ——与挠曲线形状有关的参数;

φ_0 ——最中截面最大平均曲率;

f_e ——跨中变形(挠度,短期荷载作用下)。

$$\text{徐变引起的变形} \quad f_c = k \varphi_s l^2 = k \varphi_0 l^2 \left(-\frac{\varphi_s}{\varphi_0} \right) = K_r E_h C_{s1} f_e$$

$$\text{混凝土收缩变形} \quad f_{sh} = k \varphi_{sh} l^2 = k \varphi_0 l^2 \left(\frac{\varphi_{sh}}{\varphi_0} \right) = \left(-\frac{\varepsilon_{sh} \varphi_{sh}}{h_0 \varphi_0} \right) f_e$$

而且 $\varphi_0 = \frac{\varepsilon_{hs}}{\xi_0 h_0}$, 如前所述在时间 t 的徐变和收缩变形的总和 f_t 为

$$\begin{aligned} f_t &= f_e + f_{sh} = K_r E_h C_{s1} f_e + \frac{\varepsilon_{sh}}{\varepsilon_{h0}} \xi_0 A_{sh} f_e \\ &= K_r \left(E_h C_{s1} + \frac{\varepsilon_{sh} A_{sh}}{\varepsilon_{h0} K_r} \xi_0 \right) f_e = K_r U f_e \end{aligned} \quad (1-47)$$

式中, f_t ——混凝土收缩徐变在时间 t 的总变形(挠度);

K_r ——混凝土徐变综合影响系数(见 1-36 式);

U 等于 $E_h C_{s1} + \frac{\varepsilon_{sh} A_{sh}}{\varepsilon_{h0} K_r} \xi_0$, 称为混凝土徐变和收缩的综合影响系数;

f_e ——混凝土弹性变形(挠度)。

可见,如果需要知道任意时间混凝土徐变与收缩的总变形,可将弹性变形乘以综合时随系数 $K_r \cdot U$ 。这个方法颇为方便、实用。

以上推导的时随系数内容,其中徐变应变 ε_{hs} 和混凝土收缩应变都是按照素混凝土试验结果得到的,没有考虑钢筋的滑移、裂缝开展等因素对长期变形的影响。

2.3 长期刚度参数修正法

长期刚度参数修正法是在短期变形解析法的基础上,考虑长期荷

载对 ψ , γ 的影响。 ψ_c 与 γ_c 可根据下式修正。

$$B_c = \frac{\eta h_0^3}{\frac{\psi_c}{E_g I_g} + \frac{\psi_h}{\omega \gamma_c E_h F_h}} \quad (1-48)$$

式中, B_c ——长期荷载作用下的刚度;

ψ_c ——长期荷载作用下钢筋的不均匀系数;

γ_c ——反映受压区混凝土长期荷载作用下塑性变形的影响参数。

$\psi_c = 1 - \omega_x \frac{M_{re}}{M}$, 在长期荷载作用下, 光面钢筋 $\omega_x = 0.3$, 螺纹钢

筋 $\omega_x = 0.4$, M_{re} 为开裂弯矩, M 为使用荷载作用下的弯矩。至于 γ_c , 正常气温取 0.15, 干燥情况取 0.07, 较湿情况取 0.02。另外, 各国普遍采用长期变形系数

$$\theta = \frac{f_c}{f_a} \quad (1-49)$$

式中, f_c ——长期荷载的变形;

f_a ——短期荷载的变形。则

$$B_c = B \frac{M}{M_0 \theta + M_a} \quad (1-50)$$

式中, B ——短期荷载作用下的刚度;

M ——全部标准荷载所产生的弯矩;

M_0 ——长期作用下标准荷载所产生的弯矩;

M_a ——短期作用下标准荷载所产生的弯矩;

θ ——荷载长期作用下的刚度降低系数。

如果 μ' 表示受压钢筋的配筋率, μ 表示受拉区配筋率, 则

$$\mu' = 0 \quad \theta = 2.0$$

$$\mu' = \mu \quad \theta = 1.6$$

当 μ' 为中间数值时, θ 按直线内插法取用。对翼缘在受拉区的 T 形截面, θ 应增加 20%。

2.4 按变弹性模量计算长期变形(或挠度)

美国康奈尔大学温特(George Winters)教授建议用变化的弹性模量来考虑时随变形。该法考虑随时的弹性模量仅是时间 t 的函数,故有

$$E'_{ht} = \nu E_h \quad (1-51)$$

式中, ν 是考虑时间因素的混凝土弹性系数,它又是荷载持续时间和抗压强度的函数,根据定义:

$$E'_{ht} = \frac{1}{\varepsilon_e + \varepsilon_{s+sh}} \quad (1-52)$$

式中, ε_e ——单位应力下混凝土的弹性应变;

ε_{s+sh} ——单位应力下混凝土的收缩和徐变应变;按经验公式,

$$\varepsilon_{s+sh} = y c' t^{\frac{1}{3}}$$

其中, $c' = \frac{0.93}{2.5\sqrt{a}}$, a 是受载龄期以月计;

y ——与时间有关的系数;

t ——时间,以月计。

这样, (1-52) 式可写成 $E'_{ht} = \frac{E_a}{\sigma + E_h y c' t^{\frac{1}{3}}}$ (1-53)

如果 I_{cr} 为开裂截面的换算惯矩,则计算刚度为 $E'_{ht} I_{cr}$ 。最后用一般结构力学公式计算挠度。

康奈耳大学曾做过 61 根小梁试验,在长期荷载作用下用上述方法计算结果与试验对比不超过 20%。

2.5 “ λ ”法

美国 ACI-1977 年规范,采纳康奈耳大学试验结果,将短期荷载引起的变形或挠度乘以 $(1+\lambda)$ 得到长期变形或挠度,则

$$f_t = (1+\lambda) f_s + f_L \quad (1-54)$$

式中, f_t ——总的变形或挠度;

f_s ——混凝土弹性变形(或短期变形或挠度)或挠度;

f_L ——活载引起混凝土的变形；

λ ——是混凝土收缩与徐变引起的增长系数。可查图 1-12

t 与 λ 曲线

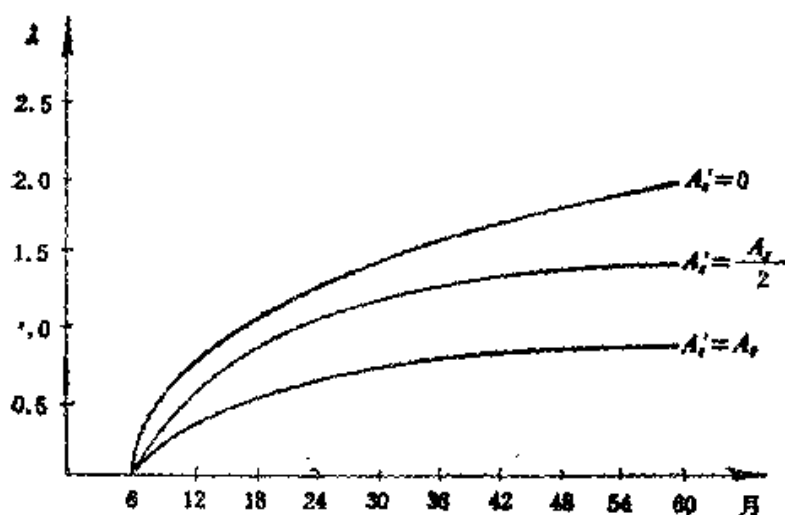


图 1-12 λ 与 t 的曲线

对混凝土收缩徐变取终值时，

$$\lambda = 2.0 - 1.2 \frac{A_s'}{A_s} \quad (1-55)$$

式中， λ ——混凝土收缩徐变全部完成后的参数；

A_s' , A_s ——混凝土受压区与受拉区钢筋面积。

2.6 小结

在本章第二节中讨论了受弯构件长期荷载作用下的变形或挠度，重点介绍了：

(1) 时随系数法 这个方法适用性强，考虑各种因素比较全面，是一个好方法。

(2) 刚度修正法 目前建筑规范多采用此法，精度足够。

(3) 变弹性模量法 单纯把混凝土收缩徐变归纳为 E'_{lt} ，这当然简单可行，但精度是不够的。

(4) “ λ ”法 引入系数“ λ ”，它与受压区和受拉区配筋有关。美国 AOI 规范沿用已久，此法比较简便，有一定实用价值。

2.7 对变形与刚度问题的展望

钢筋混凝土变形与刚度的理论已趋成熟。目前发展很缓慢,主要是短期荷载作用下变形与刚度计算几种理论计算结果,虽然有误差,但基本上还能满足生产实践的需要。但长期荷载作用下的变形与刚度还不能满足需要,这是由于收缩与徐变理论的发展所决定的。

我们曾计算几个示例对比。钢筋

$$E_g = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}, A_g = 70.62 \text{cm}^2$$

$$E_h = 3.0 \times 10^4 \text{MPa}, R_h = 17.5 \text{MPa}$$

$$R_s = 1.75 \text{MPa}, A_h = 4540 \text{cm}^2, \mu = 0.01548$$

$$l = 15 \text{m}, M = 1.509 \times 10^6 \text{kN} \cdot \text{m}$$

计算结果如下:

短期荷载作用下挠度 f 。

- | | |
|---------------------|---------|
| (1) 解析刚度法, (1-25) 式 | 3.27 cm |
| (2) 有效惯矩法, (1-27) 式 | 2.09 cm |
| (3) 等效拉力法, (1-32) 式 | 2.09 cm |

可以看出解析刚度法计算结果要比其他两法均大一些。

至于长期荷载作用下的挠度,如按时随系数法采用伯莱逊建议式, $f_t = 6.54 \text{cm}$; 如按长期刚度参数修正法, $f_t = 5.00 \text{cm}$ 。短期荷载作用下的解析刚度法中虽然较精确,但参数取值还有不合理之处。时随系数法中也同样在取值范围还需要改进。长期荷载作用下,由于试验验证比较困难,这项科研任务还很繁重,尚有待解决。

本章参考文献

[1] 王传志, 滕智明主编. 钢筋混凝土结构理论. 北京: 中国建筑工业出版社, 1985.

[2] 天津大学等三校合编. 钢筋混凝土结构, 上册. 北京: 中国建筑工业出版社, 1980.

第二章 混凝土裂缝理论

本章主要讨论裂缝产生的原因、裂缝形成的机理、短期荷载作用下裂缝计算理论以及长期荷载作用下裂缝公式,最后作一小结。

2.1 裂缝产生的原因

混凝土在凝结及硬化过程中,就存在气穴和微细的、肉眼看不见的裂缝,称为微观裂缝。混凝土在受力之后,微观裂缝逐渐连通贯穿形成了宏观裂缝。如果荷载继续扩展,结构最后丧失承载能力。

混凝土中存在的气穴和微观裂缝,是混凝土受力呈现非线性现象的主要原因之一。也是其抗拉强度远远低于抗压强度的原因之一。从微观上研究混凝土多相体的受力性能,是研究混凝土强度理论的新动向,但是这方面的工作尚处于初始阶段。

现在主要研究的是对结构强度或正常使用有直接影响的宏观裂缝,即工作阶段裂缝。

受载前混凝土产生裂缝的原因不外有下列几种:

(1) 由水泥水化热引起的裂缝 在混凝土凝固和硬化过程中,水泥和水之间产生化学反应,放出大量水化热,因而使混凝土温度升高。当混凝土内部与外部的温度相差很大,温度应力超过混凝土极限拉应力时,裂缝就会发生。避免这种裂缝的措施就是合理地分层、分块、增设工作缝;同时尽量采用低热水泥。还有,在受压区埋置块石、加粉煤灰、埋置冷却管道、预冷骨料、妥善养护等。

(2) 塑性收缩引起的裂缝 混凝土浇筑后数小时,仍处于塑性状态,由于天气炎热以及混凝土水化热高,都容易引起这种裂缝。防止的措施就是在混凝土表面浇水或加盖席棚及塑料布防止表面水分蒸发过快。

(3) 由混凝土塑性坍落引起的裂缝 混凝土塑性坍落受到模板或预埋钢筋的抑制,或因混凝土浇筑在过分凸凹不平的基础上,或因模板的沉陷、移动,或因斜面浇筑的混凝土向下流淌而产生这类裂缝。防止这类裂缝的措施是采用适宜的配合比及振捣、养护、防止模板沉陷。

(4) 混凝土干缩引起的裂缝 在混凝土硬化过程中,干缩会引起体积变化,如果体积变化受到约束就会产生裂缝。此类裂缝的宽度有时很大,甚至于横向贯穿整个构件。防止这种裂缝的主要措施是改善水泥性能,减少水泥用量,降低水灰比,加强潮湿养护。

(5) 由碱性骨料反应引起的裂缝 碱性骨料反应有两种:一种是碱-硅酸盐骨料反应;另一种是碱-碳酸盐骨料反应。后一种比较少见。前一种引起混凝土裂缝原因是由于混凝土加水拌和后,水泥中的碱不断溶解,这种碱液与活性骨料中硅酸盐物质起化学反应,析出胶状的碱硅胶,碱硅胶从周围介质中吸水膨胀,体积增加约三倍,从而使混凝土膨胀开裂。为了防止这种裂缝,应尽可能选择非活性骨料,控制水泥含碱量,掺用加气剂及某些混合料。

(6) 由电流腐蚀引起的裂缝 防止措施是尽可能不使混凝土构件感电。在建筑外墙安装插头应该绝缘。

(7) 外界温度变化引起裂缝 防止措施为设置温度干缩缝。

(8) 强迫变形引起的裂缝 结构基础不均匀沉陷使结构构件受到强迫变形,会引起构件的裂缝。防止措施是采取合理构造,设置沉陷缝。

(9) 冰冻引起裂缝 由于水分冻结会沿后张法管道形成裂缝。

(10) 钢筋腐蚀引起的裂缝 防止措施是加厚保护层,要注意混凝土密实性与抗渗性。

以上 10 种裂缝均属于受荷前裂缝。

(11) 由受荷引起的裂缝 裂缝方向大多与主拉应力方向正交,对于这类裂缝应由合理设计和构造配筋来防止。至于裂缝发生的详细讨论,见本章参考文献[1]。

2.2 受载后的裂缝

法国预应力著名学者居易翁(Guyon)提出混凝土微裂理论, 现介绍如下:

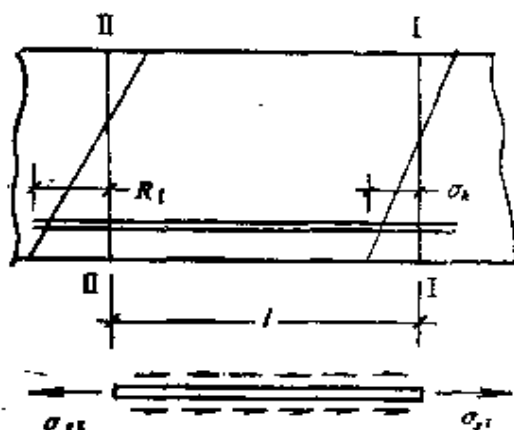


图 2-1 截面受力情况

如图 2-1, I—I 截面钢筋处混凝土应力为 σ_h , II—II 截面混凝土达极限抗拉强度 R_t , 因为钢筋与混凝土粘着牢固, 两者变形协调。故有:

$$\sigma_{sI} = n\sigma_h = nR_t \cdot \varphi$$

式中, σ_{sI} ——表示 I—I 截面钢筋应力;

σ_h ——表示 I—I 截面混凝土拉应力;

n ——表示 $\frac{E_s}{E_h}$, 即钢筋弹性模量与混凝土弹性模量之比;

$\varphi = \frac{\sigma_h}{R_t}$ ——混凝土拉应力与极限抗拉强度之比, 是个变量参数;

在 I—I 截面上钢筋的拉应力 $\sigma_{sI} = n \cdot R_t$

从力的平衡得到:

$$(\sigma_{sI} - \sigma_{sII}) \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \pi \cdot d \cdot R_b l$$

式中, d ——表示钢筋直径;

R_b ——混凝土与钢筋间的平均粘结应力;

l ——I—I 截面到 II—II 的水平距离。

将上述 σ_{sI} 及 σ_{sII} 分别代入上式中, 化简后得

$$l = \frac{d}{4} (1 - \varphi) \cdot \frac{nR_t}{R_b}$$

$$\text{现令 } \frac{R_b}{R_t} = p \quad \therefore l = \frac{d}{4} (1 - \varphi) \cdot \frac{n}{p}$$

如果钢筋的平均应力为 σ_s , 则

$$\sigma_s = \frac{\sigma_{s1} + \sigma_{s2}}{2} = \frac{nR_t}{2} (1 + \varphi)$$

混凝土平均应力为 σ_h , 则

$$\sigma_h = \frac{R_t}{2}$$

混凝土的裂缝宽度 w 等于钢筋的伸长与混凝土伸长之差, 故

$$w = \frac{nR_t}{2} (1 + \varphi) \cdot \frac{l}{E_s} - \frac{R_t \cdot l}{2E_h} = \frac{\varphi R_t \cdot l}{2E_h}$$

将 $l = \frac{d}{4} (1 - \varphi)$, 代入上式, 经整理后得到

$$\varphi^2 - \varphi + \frac{8E_h p w}{R_t \cdot d \cdot n} = 0$$

解得:

$$\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{32E_h p w}{nR_t \cdot d}}$$

如果 w_f 为肉眼可以察觉的混凝土裂缝宽度, 因此微裂缝的宽度应该是

$$w \leq w_f$$

φ 是个变量参数, 即 $\frac{\sigma_h}{R_t}$; 如果微裂缝达到 w_f 时, 则 $\varphi = \varphi_f$

$$\varphi_f = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{32w_f E_h p}{nR_t \cdot d}}$$

混凝土中不存在微裂时的应变为 $\varepsilon = \frac{R_t}{E_h}$, 当混凝土存在微裂时的应变

$$\varepsilon_f = \frac{R_t}{E_h} + \frac{w_f}{l}$$

而且

$$\frac{w_f}{l} = \frac{R_t}{E_h} \cdot \frac{\varphi_f}{2}$$

故

$$\varepsilon_f = \frac{R_t}{E_h} \left(1 + \frac{\varphi_f}{2} \right) \quad (2-1)$$

(2-1) 式中, $\left(1 + \frac{\varphi_f}{2} \right)$ 称为塑性系数。这说明当有细微裂缝存在

时,肉眼能见开裂的应变要比 $\frac{R_t}{E_h}$ 大 $(1 + \frac{\varphi_t}{2})$ 倍。

2.3 裂缝发生机理

这里我们讨论两种裂缝机理:一是属于法向裂缝;二是属于斜裂缝。关于法向裂缝,主要讨论钢筋混凝土受拉及受弯构件的力学模式,也论及次裂缝的发生;还通过数学计算说明侧面法向裂缝宽度沿深度的变化。对无腹筋梁斜拉破坏机理也在此给出,并且说明由于主斜裂缝的出现形成端部体大偏心受压作用,因此主拉应力超过允许值而导致的斜裂缝开展的机理特别容易接受。

2.3.1 法向裂缝

2.3.1.1 轴心受拉构件

(1) 裂缝的发生与分布

轴心受拉构件的混凝土拉应力离端面一个截面高度距离之后,趋向于均匀分布。第一条裂缝出现在混凝土抗拉最弱的截面。当拉应力和混凝土实际抗拉强度分布曲线在最低点 R_t' 相交,如图 2-2 所示时,第一条裂缝截面处的混凝土脱离工作,钢筋在第一条裂缝的截面处的应力增到 σ_s 。这时受到张紧的混凝土分别向裂缝两边回缩,但是由于包裹在钢筋上的混凝土受到钢筋的约束产生抗滑移的力(握裹力),因而使混凝土的回缩受到某种程度上的限制。混凝土中拉应力随其离裂缝的距离加大而增大,当荷载继续增大,混凝土拉应力分布曲线又与实际抗拉强度分布曲线相切,这时在该处又出现第二条裂缝。当第二条裂缝出现后混凝土应力 σ_{ht} 又进行重分布,如图 2-2 中虚线所示。

(2) 混凝土的回缩和裂缝的开展

裂缝处混凝土的回缩继续发展,钢筋就不断伸长,混凝土与钢筋间不断产生相对粘结滑行,就造成裂缝的不断开展。沿截面高度,混凝土收缩不均匀,因为钢筋对靠近它表面的混凝土约束较好,故回缩小些,而外表混凝土较为自由,则回缩多一些,所以裂缝间同一截面上混凝

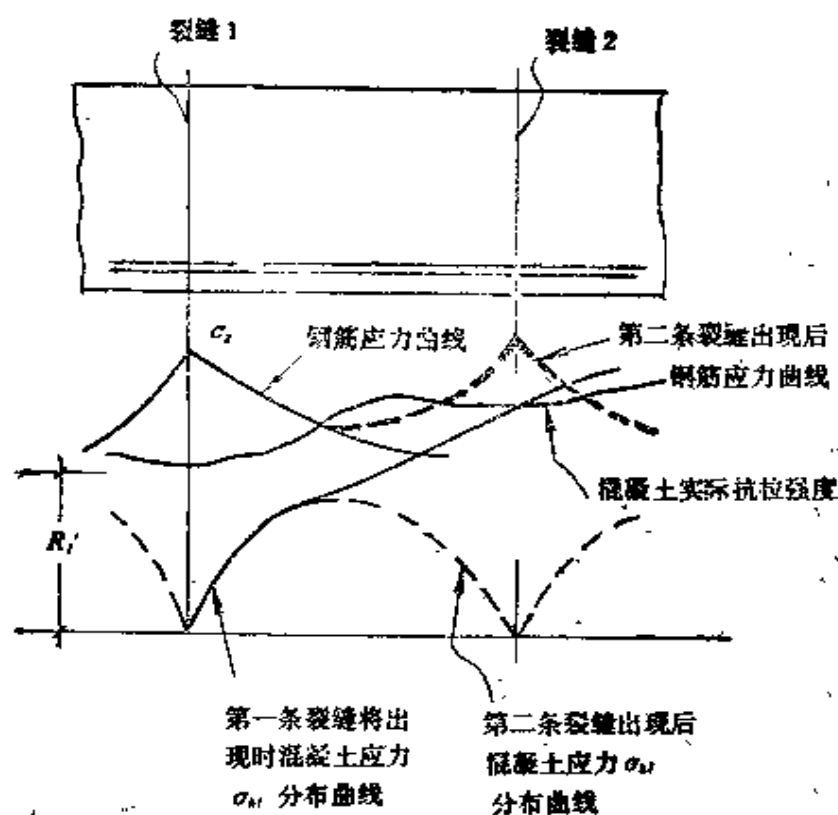


图 2-2 法向裂缝开展机理

土拉应力也不均匀，靠近钢筋的大些，而外表面的小一些。混凝土回缩几乎使整个截面放松到无应力状态，这时钢筋应力将被减弱。

(3) 裂缝间钢筋的应力

裂缝处钢筋应力为最大(σ_s)，裂缝与裂缝间的中间钢筋应力为最小($\sigma_s - \Delta\sigma_s$)，钢筋之间的力的差值由混凝土与钢筋之间的粘结力(或称握裹力)平衡，故有

$$(\sigma_s - \Delta\sigma_s)A_s + \int_0^x \tau_{bx} \cdot u dx = \sigma_s A_s$$

式中， A_s ——钢筋截面面积；

σ_s ——裂缝处钢筋拉应力；

$\sigma_s - \Delta\sigma_s$ ——裂缝与裂缝的中间钢筋的应力；

x ——从裂缝处开始的距离；

τ_{bx} ——钢筋与混凝土在 x 处的粘结应力；

u ——钢筋的周长。

由于裂缝间的混凝土参加工作,若 τ_b 按三角形分布,而最大值在裂缝处记为 τ_b 时,从裂缝到裂缝中部任一点 x 处钢筋的应力差 $\Delta\sigma_s$,可由下式表示:

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_s &= \frac{u}{A_s} \int_0^x \left(1 - \frac{2x}{l_r}\right) \tau_b dx = \frac{u}{A_s} \tau_b \left(x - \frac{x^2}{l_r}\right) \Big|_0^x \\ &= \frac{u}{A_s} \tau_b \left(x - \frac{x^2}{l_r}\right)\end{aligned}\quad (2-2)$$

式中, $\Delta\sigma_s$ ——任一点钢筋应力差;

u ——钢筋的周长;

A_s ——钢筋截面面积;

l_r ——裂缝间距;

x ——以裂缝处为原点的水平距离;

τ_b ——裂缝处最大粘结应力。

(2-2)式说明,当 τ_{bx} 按直角三角形分布时, $\Delta\sigma_s$ 与 x 成二次抛物线变化关系。

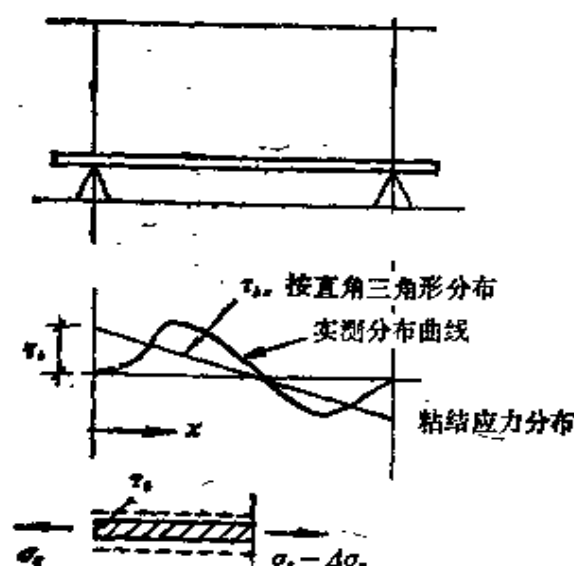


图2-3 螺纹钢筋粘结应力按三角形分布

(4) 裂缝间距的稳定条件

在荷载为 1.5~2.0 倍的抗裂荷载时,裂缝间距趋向于稳定。如果抗拉极限强度 R_t' 为 $0.7R_t$ (R_t 为 28 天抗拉极限强度),配筋率 $\mu = 2\%$, 3% 及 5% 时,裂缝间距变化不大时(稳定状态),钢筋最大应力分别为 1360 kgf/cm^2 , 1020 kgf/cm^2 及 750 kgf/cm^2 。(注: $1 \text{ kgf/cm}^2 = 9.80665 \times 10^4 \text{ Pa}$)

(5) 裂缝宽度

裂缝宽度由三个部分组成:

- (1) 裂缝处钢筋表面混凝土滑移量 Δ_h ;
- (2) 钢筋周围混凝土拉应变与混凝土表面处受拉应变之差 Δ_s ;
- (3) 从钢筋表面处到外表面总的剪切变 Δ_j ;

这里 $\Delta_h = \int_0^{l/2} \frac{\tau_{bx}}{E_h} \cdot \epsilon dx$, ϵ 为滑移应变。

但实际上 Δ_s 与 Δ_j 均不是很大, 相应为 $76 \frac{\tau_b}{E_h}$ 与 $86 \frac{\tau_b}{E_h}$ 左右。

2.3.1.2 受弯构件

受弯构件裂缝出现的机理与受拉构件相同, 但它有(1)腹中裂缝; (2) 枝状裂缝; (3) 根状裂缝, 如图 2-4 所示。参见本章参考文献 [2]。

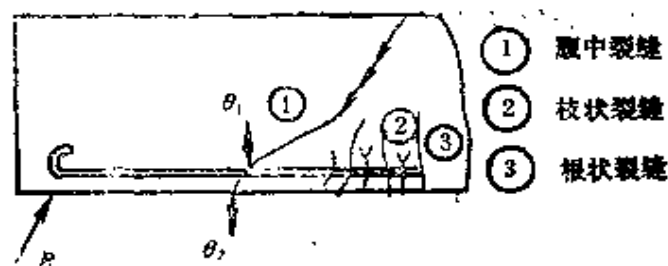


图 2-4 三种裂缝形状

2.3.2 斜裂缝

2.3.2.1 斜拉破坏

对无腹筋或腹筋少的构件, 当剪跨比大于 3, 往往会出现斜拉破坏, 见图 2-4。

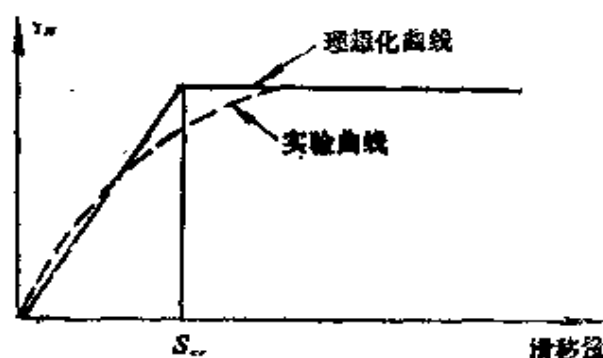
2.3.2.2 斜裂缝的开展

当配置斜箍筋, 由于对腹部混凝土的有效约束, 斜箍筋与混凝土之间的咬合力较大, 斜裂缝发展较短, 裂缝开展要小些。这种斜箍筋也将减小斜向力 R 的偏心距, 同时提高抵抗斜向压碎的承载能力, 实验也证明这一论断。为防止斜裂缝也可以加密直钢箍的间距。

2.4 短期荷载作用下的裂缝计算理论

2.4.1 概述

目前,广泛采用高强度钢筋,对控制裂缝与限制挠度有一定作用。对短期荷载作用下裂缝的开展有两种主要假定:(1)裂缝宽度的增长,主要与钢筋的应力成正比;(2)钢筋与混凝土粘结滑移很小,可以忽略不计,故钢筋水平面上的裂缝宽度等于零。实际上滑移与粘着应力有一定关系如图 2-5 所示,关于这个问题讨论,参阅本章参考文献[3]。



短期荷载作用下纯弯曲裂缝的理论可分成四类:

(1) 有滑移理论

基本假定是在短期加载之后,钢筋与混凝土之间存在着

相对滑移。混凝土与钢筋之间由于粘着应力的分布图式不同,沿裂缝之间可以推导出不同的理论公式。其中美国霍格内斯塔德(Hognestad)建议的公式有其代表性。

前苏联别尔格(O.Я.Берг)把中心受拉构件的裂缝开展推广到受弯构件,采用有效握裹面积(A_r)的概念。 $A_r < 12d$, d 表示钢筋直径。随后美籍华人吉金瑞(M. Ohl)及美国人克斯汀(A. F. Kirstein)通过拔出试验认为 $A_r = 4d$ 。而霍氏建议 $A_r = 2b(h - h_0)$, 这里 b 为配筋处梁宽, h 为梁高, h_0 为钢筋重心到梁上缘距离。

(2) 无滑移理论

沿钢筋的水平面上如果钢筋与混凝土之间不存在相对滑移,则在钢筋处的裂缝宽度应该为零。裂缝开展的外形如图 2-6 所示。在混凝土边缘上裂缝宽度有所增宽,形成楔形。按无滑移理论,裂缝形成的主要原因是钢筋周围混凝土的变形所引起的。两条裂缝之间混凝土应力与应变的分布可按弹性力学方法解得,计算结果显示混凝土有继续开裂的可能性。英国水泥与混凝土学会贝司

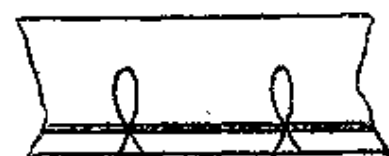


图 2-6 无滑移理论
裂缝外形

(Base)等人,在普查梁上裂缝之后,得出结论,认为无滑移假设能更好地估算裂缝,他们具体建议的公式在英国 CP-110 规范中被采纳。

(3) 断裂力学理论

应用于钢筋混凝土结构的断裂力学经典理论由于与实验不符而被许多学者所否定,主要是因为断裂力学的研究对象是脆性材料,而钢筋混凝土为一种弹塑性材料,其能量释放不符合断裂力学准则。但是考虑一种所谓能量准则,混凝土在某一范围内出现裂缝,其能量在某一局部释放,如果认为断裂释放能近似地等于应变图形乘以断裂区域的有效宽度,则断裂力学还是可以在钢筋混凝土裂缝上应用。瑞典人海德伯克(A.Hillerborg)与美国人巴森(Z.P.Bazant)等人是将断裂力学推广应用到钢筋混凝土的倡议者。巴森对此问题进行了创造性的理论分析。

(4) 数理统计法

丹麦阿·埃夫森(A. Efsen)于1957年首次提出。考虑到裂缝试验资料的离散性,有必要通过统计计算方法来整理试验数据,说明裂缝开展的概率。

例如美国 ACI 318-71 公式

$$a_{f, \max} = 0.076 \sqrt{t_b A_r} \cdot \frac{h_2}{h_1} \cdot \sigma_s \times 10^{-6} (\text{英寸}) \quad (2-3)$$

式中, $a_{f, \max}$ ——裂缝最大宽度;

t_b ——混凝土保护层;

A_r ——为单根钢筋的握裹面积;

h_2, h_1 ——分别为中和轴到受拉区混凝土边缘与受拉区钢筋重心的距离;

σ_s ——钢筋拉应力。

以上这些项均应采用英制。0.076 就是通过许多构件统计出来的系数。ACI318-71 公式是用来估计短期荷载作用下的裂缝宽度的。此式算出的结果与实际量测符合较好,受到美国工程师的赞许与肯定。

2.4.2 别尔格裂缝理论

2.4.2.1 基本假定

- (1) 无论实际受力状态如何, 计算模式均为中心受拉。
- (2) 钢筋与混凝土之间有粘结滑移。

2.4.2.2 理论推导

u 为任何一点钢筋的位移(有混凝土粘着), u_0 为任何一点钢筋的不考虑混凝土存在时的位移。

$$\tau_N = K(u_0 - u)$$

式中, τ_N ——钢筋与混凝土之间的粘结应力;

K ——比例常数;

$u_0 = \varepsilon_s \cdot x$, 它是由式 $\frac{du}{dx} = \varepsilon_s$ 导得的, ε_s 为钢筋应变, x 为坐

标, 均见图 2-7;

$u = \varepsilon_s x - c$, c 为一常数。

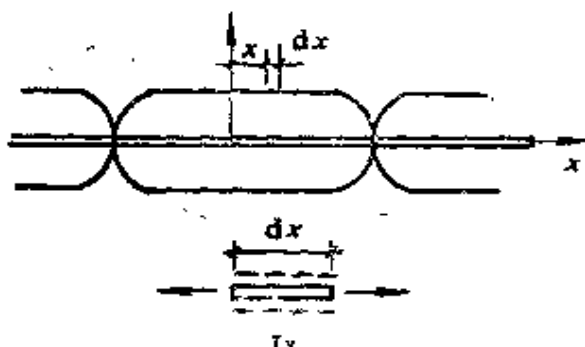


图 2-7 裂缝公式推导图示

d_i 为 i 规格的钢筋直径。

则

$$U = \pi \sum n_i d_i$$

$$\frac{dT}{dx} = -\pi \sum n_i d_i \cdot \tau_N$$

在图 2-7, 中点处的混凝土应力为 $\sigma_b = \frac{T}{A_b} = E_b \varepsilon_s$

$$\therefore T = \varepsilon_s E_b A_b = E_b A_b \frac{du}{dx}$$

E_s 为钢筋弹性模量, A_b 为混凝土截面面积。

从力的平衡条件得到:

$$T - (T + dT) = \tau_N \cdot U \cdot dx$$

式中, T 表示 dx 距离内钢筋的力;

dT 表示 dx 距离内钢筋力的增量;

U 为钢筋的周长;

n_i 为钢筋根数;

将上式微分一次, 得到

$$\frac{dT}{dx} = E_h A_h \frac{d^2 u}{dx^2} = -\pi \sum n_i d_i K (\varepsilon_s x - u)$$

如令 $R_a = \frac{A_h}{\sum n_i d_i}$, R_a 又称配筋半径, 则有如下的微分方程式,

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{K\pi}{E_h R_a} u = -\frac{K\pi}{E_h R_a} \varepsilon_s \cdot x$$

上式的通解为:

$$u = c_1 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{K\pi}{E_h R_a}} \cdot x + c_2 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{K\pi}{E_h R_a}} \cdot x + \varepsilon_s \cdot x$$

边界条件: $x=0, u=0, c_1=0$

$$x = \frac{l_f}{2}, \sigma_h = 0, \frac{du}{dx} = 0, \text{ 则有}$$

$$c_2 = \frac{-\varepsilon_s}{\sqrt{\frac{K\pi}{E_h R_a}} \cdot \operatorname{ch} \sqrt{\frac{K\pi}{E_h R_a}} \cdot \frac{l_f}{2}}$$

$$\therefore u = -\frac{\varepsilon_s}{\sqrt{\frac{K\pi}{E_h R_a}} \cdot \operatorname{ch} \sqrt{\frac{K\pi}{E_h R_a}} \cdot \frac{l_f}{2}} \cdot \operatorname{sh} \sqrt{\frac{K\pi}{E_h R_a}} \cdot x + \varepsilon_s x, \quad l_f \text{ 为}$$

裂缝间距。

$$\sigma_h = E_h \frac{du}{dx}, \quad \sigma_h = E_h \varepsilon_s \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{K\pi}{E_h R_a}} \cdot x}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{K\pi}{E_h R_a}} \cdot \frac{l_f}{2}} \right)$$

$\sigma_h = R_t$ (R_t 为混凝土极限抗拉强度), $x=0$

$$\therefore \frac{R_t}{\varepsilon_s E_h} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \sqrt{\frac{K\pi}{E_h R_a}} \cdot \frac{l_f}{2}}$$

则

$$l_f = 2 \sqrt{R_a} \cdot \sqrt{\frac{E_h}{K\pi}} \operatorname{ch}^{-1} \frac{E_h \varepsilon_s}{E_h \varepsilon_s - R_t}$$

设

$$l_f = m \sqrt{R_a}; \quad m = \sqrt{\frac{E_h}{K\pi}} \cdot 2 \operatorname{ch}^{-1} \frac{E_h \varepsilon_s}{E_h \varepsilon_s - R_t}$$

通过试验, 得知螺纹钢筋 $m = 1.6$, 由于最大裂缝为平均裂缝的 3~2.5 倍, 现取上限值, 故有:

$$a_{f, \max} = 4.8 \psi_2 \frac{\sigma_g}{E_g} \sqrt{R_a} \quad (2-4)$$

式中, $a_{f, \max}$ ——最大裂缝宽度;

ψ_2 ——与混凝土有关的参数, 30 号混凝土以下 ψ_2 取 0.7; 30 号混凝土以上 ψ_2 取 0.5。

对于光面钢筋, 推导比较简单, 平均裂缝宽度 a_f 为:

$$a_f = (\varepsilon_g - \varepsilon_h) l_f = \frac{\sigma_g}{E_g} \psi_1 0.318 R_a$$

式中, ε_g , ε_h 分别为钢筋与混凝土应变。

同样

$$a_{f, \max} = (2.5 \sim 3.0) a_f,$$

故有

$$a_{f, \max} = (0.8 \sim 0.95) \frac{\sigma_g}{E_g} \psi_1 R_a$$

式中, ψ_1 ——与混凝土有关的参数, 30 号混凝土以下取 $\psi_1 = 1.0$; 30 号混凝土以上 $\psi_1 = 0.8$ 。

根据别尔格理论可以总结如下:

(1) 光面钢筋: 平均裂缝间距 $l_f = 0.318 R_a$

$$\text{最大裂缝宽度 } a_{f, \max} = 0.8 \frac{\sigma_g}{E_g} \psi_1 R_a$$

(2) 螺纹钢筋: 平均裂缝间距 $l_f = 1.6 \sqrt{R_a}$

$$\text{最大裂缝宽度 } a_{f, \max} = 4.8 \frac{\sigma_g}{E_g} \psi_2 \sqrt{R_a}$$

这里, R_a ——配筋半径;

σ_g ——钢筋应力;

E_g ——钢筋弹性模量;

ψ_1, ψ_2 ——混凝土参数, 已如上述。

2.4.9 我国规范中的裂缝公式

现将 1985 年规范公式的计算情况, 归纳如下:

1. 公路桥涵规范(JTJ 023-85)

$$a_{f, \max} = C_1 C_2 C_3 \frac{\sigma_g}{E_g} \cdot \frac{30 + d}{0.28 + 10\mu} \quad (2-5)$$

式中, $a_{f, \max}$ ——最大裂缝宽度;

μ ——配筋率 $\frac{A_g}{bh_0 + (b_w - b)h_w}$, 且 $0.006 \leq \mu \leq 0.02$;

b 为梁肋宽; h_0 为梁的有效高度(受压边缘到受拉钢筋重心的距离); b_w 为受拉翼缘板宽度; h_w 为翼缘板厚度;

A_g 为钢筋截面面积。

d ——纵向受拉钢筋 A_g 的直径。当用不同直径的钢筋直径时, d 改用换算直径 $\frac{4A_g}{S}$, S 为纵向受拉钢筋的总周长; d 以毫米计。

σ_g ——钢筋应力, 可用 $\frac{M}{0.87A_g h_0}$ 求得, M 为截面弯矩;

E_g ——钢筋弹性模量;

C_1 ——形状系数, 对于光面钢筋, $C_1 = 1.4$; 对于螺纹钢筋 $C_1 = 1.0$;

C_2 ——荷载作用系数, 对于短期荷载, $C_2 = 1.0$; 对于长期荷载 $C_2 = 1 + \frac{0.5 N_0}{N}$, N_0 为长期荷载内力, N 为全部荷载内力;

C_3 ——结构形状系数, 对于梁 $C_3 = 1.0$, 对于板 $C_3 = 1.15$ 。

2. 1985 年铁路桥涵规范

$$a_f = K_1 K_2 \gamma \frac{\sigma_g}{E_g} \left(80 + \frac{8 + 0.4d}{\sqrt{u_s}} \right) \quad (2-6)$$

式中, a_f ——裂缝宽度(以 mm 表示);

K_1 ——与钢筋形状有关系数, 对于光面钢筋, $K_1 = 1.6$; 对于螺纹钢筋 $K_1 = 0.8$;

K_2 ——与内力有关系数, 对光面钢筋 $K_2 = 1 + \frac{0.5(S_1 + S_2)}{S}$; S_1

为活载内力; S_2 为恒载内力; S 为总荷载内力。对螺纹钢
筋 $K_2 = 1 + \frac{0.3 S_1}{S} + \frac{0.5 S_2}{S}$, $S = S_1 + S_2 + S_3$, S_3 为其
他荷载内力;

γ ——结构形式系数, 对梁取 1.1, 对板取 1.2;

u_s ——配筋率, 等于 $\frac{n A_g}{A_h}$; n 表示钢筋根数, A_g 是一根钢筋的截
面积, A_h 为混凝土面积;

σ_s ——钢筋应力;

E_s ——钢筋弹性模量。

3. 工民建 1986 年规范

$$\sigma_{s, \max} = C_1 \psi \frac{\sigma_s}{E_s} (2.7c + 0.11 \frac{d}{u}) \gamma \quad (2-7)$$

式中, $\mu = \frac{A_g}{b h_0 + (b_x - b) h_x}$

$$\psi = 1.1 - \frac{0.65 R_e^2}{u \sigma_s}$$

在(2-7)式中, 其他符号表示:

C_1 ——受载形式系数, 对轴心受拉, $C_1 = 2.7$, 偏心受拉, $C_1 = 2.4$, 对弯曲及偏心受压 $C_1 = 2.1$;

γ ——钢筋形状系数, 对于光面钢筋 $\gamma = 1.0$; 对于螺纹钢, $\gamma = 0.7$; 对于低碳冷拔钢丝, $\gamma = 1.25$;

ψ ——钢筋应力均质系数 $\psi < 0.4$ 取 0.4, $\psi > 1.0$ 取 1.0 承受反复荷载时 ψ 取 1.0;

d ——钢筋等效直径, $d = \frac{\Sigma A_g}{S}$, S 为钢筋总周长;

c ——混凝土保护层 $c < 2\text{cm}$ 时取 2cm, $c > 5\text{cm}$ 时取 5cm;

μ ——配筋率, b , h_0 , b_x 在(2-5)式中定义过;

σ_s ——钢筋的应力;

E_s ——钢筋的弹性模量。

2.5 塔瘦短期有滑移理论公式

前任欧洲混凝土学会(CEB)主席希腊雅典国立科技大学教授塔瘦(T.P. Tassios), 送给作者一篇论著, 后译成中文发表在重庆交通学院学报上, 因此文有独到之处, 特加以介绍:

(1) 临界的裂缝间距

如图 2-8 所示

取 ABCD 隔离体, CD 上承受之力为

$$\frac{1}{2} A_{cef} \cdot \sigma_{co} = \frac{1}{4} A_{cef} \cdot f_{ct}$$

式中, A_{cef} ——CD 的混凝土面积;

σ_{co} ——D 点混凝土应力;

f_{ct} ——混凝土最大拉应力, 并假定 $2\sigma_{co} = f_{ct}$ 。

从 ABCD 隔离体上的平衡条件为:

$$A_g \Delta \sigma_g = \frac{1}{4} A_{cef} f_{ct}$$

$$\therefore \Delta \sigma_g = \frac{1}{4} \frac{f_{ct}}{\frac{A_g}{A_{cef}}}$$

设配筋率

$$\rho_r = \frac{A_g}{A_{cef}}$$

$$\therefore \Delta \sigma_g = \frac{1}{4} f_{ct} \frac{1}{\rho_r}$$

从 AD 钢筋平衡条件可知:

$$\sigma_g A_g - \sigma_{g0} A_g = \tau_s \pi d \frac{l_r}{2}$$

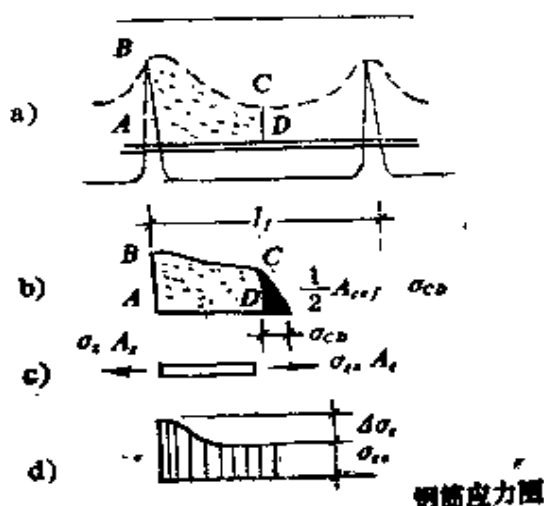


图 2-8 裂缝间受力状态

$$\therefore \Delta\sigma_s A_s = \pi d \tau_N \frac{l_t}{2}$$

而且 $A_s = \frac{\pi d^2}{4}$, 故上式变为

$$\pi \frac{d^2}{4} \cdot \frac{1}{4} \frac{f_{ct}}{\rho_r} = \tau_N \pi d \frac{l_t}{2}$$

$$\therefore l_t = \frac{1}{8} \frac{f_{ct}}{\tau_N} \frac{d}{\rho_r} \quad (2-8)$$

式中, l_t ——裂缝平均间距;

τ_N ——钢筋与混凝土之间的粘结应力(常量)。

(2-8)式也可以改成下列普遍表达式:

$$l_t = K_1 K_2 \frac{d}{\rho_r} \quad (2-9)$$

式中, K_1 ——混凝土极限拉伸强度与粘结应力有关的参数;

K_2 ——与结构受弯或受拉有关系数。

(2) 裂缝宽度

裂缝宽度的计算式:

$$\sigma_t = \varepsilon_{sm} \cdot l_t \quad (2-10)$$

ε_{sm} 为两相邻裂缝间钢筋的平均应变, 混凝土伸长量忽略不计。

这里提出特征裂缝宽度

$$a_{fc} = 1.7 \varepsilon_{sm} \cdot l_t \quad (2-11)$$

特征裂缝宽度 a_{fc} 是指假定裂缝宽度属于正态分布, 均方差(标准差)为 0.4, 失效率为 $P_t = 5\%$ 时的裂缝宽度。

最大裂缝宽度为:

$$a_{t, max} = 2.5 l_t \varepsilon_{sm} \quad (2-12)$$

2.6 长期裂缝理论

考虑长期荷载与反复荷载作用下, 裂缝宽度增大。实验证明, 长期荷载的影响要比反复荷载影响大得多。一般认为应引进钢筋应力不均匀性, 考虑徐变影响系数 γ , 混凝土长期收缩与梁曲率影响系数 α , 则

$$\sigma_{f, \max} = \frac{\sigma_g}{E_g} \cdot l_f (\psi \cdot \gamma \cdot \alpha \cdot \theta) \quad (2-13)$$

式中, ψ ——钢筋应力不均匀系数可取 0.9~1.0;

θ ——钢筋蠕变系数, 可取 1.05~1.10;

γ ——徐变影响系数, 即徐变引起应力重分布后, 使受拉钢筋应力有所增长, 可取 1.2;

α ——混凝土收缩与梁曲率增加影响系数, 可取 1.6~2.0。

如果, $\psi, \theta, \gamma, \alpha$ 均取最大值, 则得

$$\sigma_{f, \max} = 2.4 \frac{\sigma_g}{E_g} \cdot l_f \quad (2-14)$$

(2-14)式就是最大裂缝表达式。

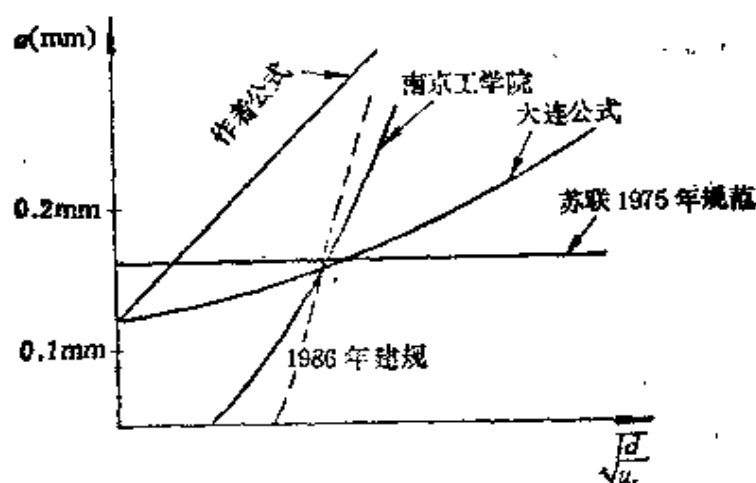


图 2-9 各种长期裂缝公式对比

至于长期荷载作用下裂缝理论, 可阅读本章参考文献[4]

2.7 裂缝研究的动向

对短期荷载的情况, 混凝土裂缝研究已基本成熟, 各家公式均反映不同因素。目前公认为混凝土裂缝理论趋向于有滑移与无滑移的统一理论。按无滑移理论, 贝司(Base)提出的公式为:

$$a_{f1} = K_1 c \epsilon_g \quad (2-15)$$

如按照沙林格提出的有滑移理论(粘结-滑移理论),其算式为:

$$a_{f2} = K_2 \left(-\frac{A_r}{d} \right) \varepsilon_g \quad (2-16)$$

目前提出的统一理论,其算式为:

$$\left(-\frac{a_f}{\varepsilon_g} \right)_0 = K_1 c + K_2 \left(-\frac{A_r}{d} \right) \quad (2-17)$$

在式(2-15)、(2-16)及(2-17)中,

a_{f1}, a_{f2} ——裂缝宽度;

ε_g ——钢筋平均应变;

A_r ——单根钢筋的握裹面积;

d ——钢筋直径;

c ——混凝土保护层;

$K_1 K_2$ ——常数项;

0——表示钢筋水平处。

(2-17)式中第一项是无滑移分量,第二项为早期裂缝分量。

另外,目前对部分预应力构件的裂缝研究还有许多没有解决的问题,有待通过试验解决。重庆交通学院做了不少研究课题。

混凝土断裂力学的应用对坝体裂缝是个非常重要的科研课题,其中非线性断裂力学(1976年瑞典Lund工学院海德伯克提出)虚拟裂缝模型(Fictitious crack model)颇有前途。要注意的是,温度引起的裂缝比荷载引起的还重要得多。美国西北大学教授(Bazant)提出钝裂纹带模型(Blunt crack bond model),为混凝土断裂力学的应用打开了广阔的思路。

裂缝是钢筋混凝土结构损伤最直接的外观表现,如何利用它丰富的内含信息评估结构的现状,是当前工程结构鉴定与评估中非常有价值的课题。这方面的研究也是最近的新动向。

本章参考文献

- [1] 赵国藩. 部分预应力混凝土及钢筋混凝土构件的裂缝控制.《土

木工程学报》1982 年第 4 期。

[2] 丁大钧. 裂缝开展机理. 《土木工程学报》, 1982 年第 1 期.

[3] Edwards, A. D. Theory of cracking in concrete Members. *Journal of Structural Division*, December 1972, ST12 Vol. 98

[4] 张士铎. 钢筋混凝土梁长期与反复荷载作用下的裂缝计算. 《土木工程学报》, 1981 年第 2 期.

第三章 预应力混凝土理论

本章介绍预应力混凝土基本概念并分析其受力状态。探讨预应力筋的配置外形与等效荷载的关系。林同炎教授首创的平衡理论以及比利时马涅耳教授 (G. Magnel) 倡导的图解法及其修正法在此也作详细阐释。最后对预拉预压的双向预应力及预弯梁的思路做必要的说明。

3.1 预应力的基本概念

钢筋混凝土构件主要缺点之一是抗拉性能相对于抗压而言很差, 在工作阶段就有裂缝存在。无论怎样提高混凝土标号或者更换强度较高的软钢都不可能从根本上改善钢筋混凝土裂缝的延伸与开展。如果对混凝土截面施加一个外力 N , 使截面上在荷载作用受到应力与外力 N 引起的截面的应力则可列出如下的关系式:

$$\sigma' < K \cdot F + K' N < \sigma \quad (3-1)$$

式中, F ——荷载引起的内力;

N ——截面上人为施加的外力;

σ, σ' ——压、拉两个限制应力, σ 为压应力时取正号, σ' 为拉应力时用负号表示;

K, K' ——有单位的系数, 包括截面特征、(惯矩或面积) 结构体系(简支, 或连续结构)及安全系数等因素。

如 $N = 0$, 属于钢筋混凝土; 预应力的发明思想就在于突破几百年的陈旧观念, 坚决否定 $N = 0$ 这一个过去认为合理而不变的假定。但是在构件截面上施加一个外力而且永远保持在那里是要花代价的。

在长期生产与生活实践中, 发展了一种新型结构, 称谓“预应力混凝土”。它的基本思想是: 在混凝土构件中由于承受外荷载产生拉应变

之前预先施加压应变,即在混凝土中产生拉应力之前预先人为地施加压应力,用来改善全部荷载作用下的受力状态,推迟截面上拉应力的出现,同时有效地限制混凝土裂缝的形成。用上述方法改善结构的受力状态,推迟裂缝的出现称之为“预应力混凝土结构”。

预应力混凝土能控制裂缝,改善挠度,发展高强材料的特性,因而使构件小而轻,恒载与活载的比值得以减小,并能增大构件的跨径,从而扩大混凝土结构的适用范围。

3.2 预应力混凝土梁的受力状态

首先取一素混凝土梁,在跨中承受一集中荷载 Q (这里暂不计自重)。随着荷载 Q 逐渐加大,就引起跨中截面上弯曲应力。当应力达到混凝土抗拉极限强度 R_t 时,梁的下缘就将产生裂缝,见图3-1a。如果超载过多,构件底部混凝土的应力将会超过材料的抗拉极限强度,竖向裂缝即已形成,而且向上延伸,导致构件破坏。

为了改善素混凝土过早的破坏,在其上施加预应力以便改善梁的受力。开始沿梁形心轴上施加轴力 N 。跨中的应力状态由预应力引起的应力及荷载引起的应力叠加而成。结果是在梁的跨中截面,上边缘的压应力为 $2\sigma_c$,下边缘的应力为零;这里 $\sigma_c = \frac{N}{F_\sigma}$, F_σ 为混凝土毛截面面积(即不扣除预应力力筋所占据的孔洞面积)。显然, N 力的大小是可以调整的,只要 $2\sigma_c$ 不超过混凝土压弯允许应力就可以了。但是,将外力 N 加在受弯梁的形心上是不经济的。如果将 N 力向下移动 $\frac{h}{6}$ 。

为什么偏要移下 $\frac{h}{6}$,这是因为研究的截面是矩形,而 $\frac{h}{6}$ 恰恰是矩形截面下核心,这样在外力 N 作用下,在截面上缘的应力等零。这样梁在跨中截面的应力(图3-1c)与图3-1b是相同的但承受的外荷载比图3-1b增加一倍,但是梁端的应力图式确很不利,上缘应力为零,而下缘为 $2\sigma_c$ 的压应力。而图3-1b的梁端应力祇有 σ_c 且整个截面都是均匀的。从此人们体会到受弯构件中外力的偏心距 e 带来不少优点。

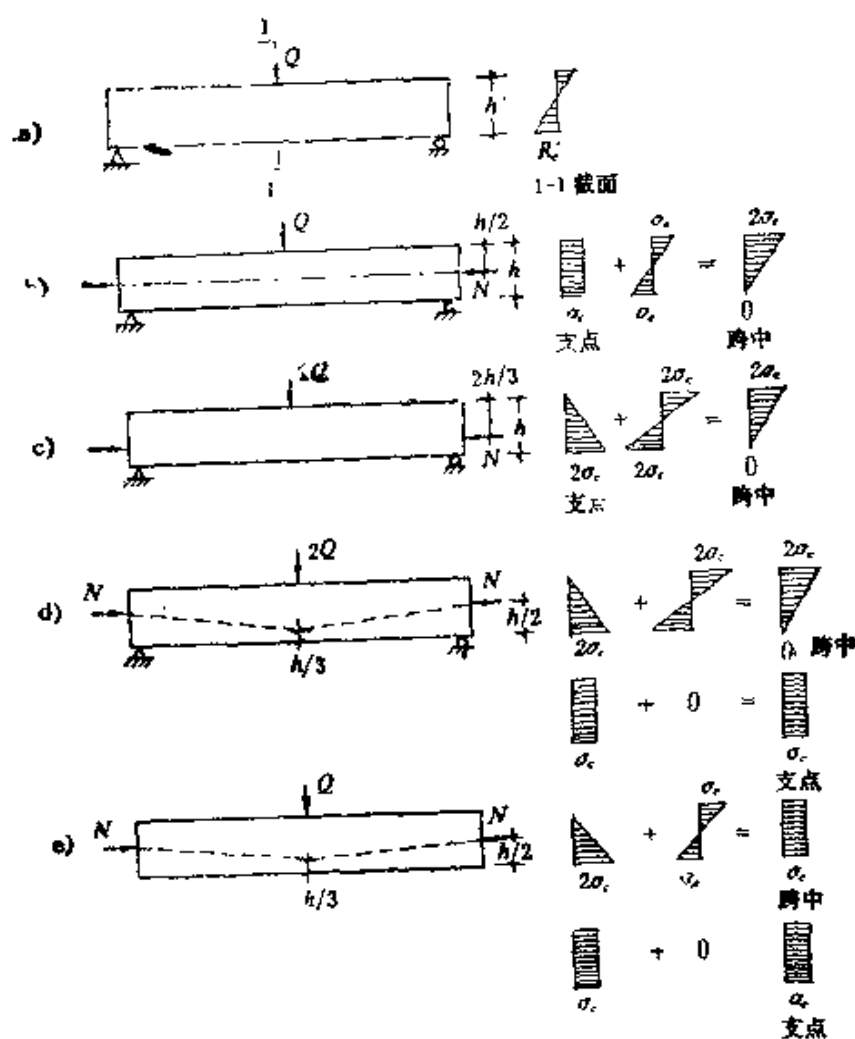


图 3-1 预加应力梁的应力状态

如果不用直线力筋施加外力 N 改用折线力筋或者曲线力筋, 如图 3-1d 所示, 则完全可以得到图 3-1c 中跨中的应力图式而且梁端的应力状态要比图 3-1c 更有利。因此, 在承受同一 Q 力作用下采用折线力筋的外形(即偏心距 e 在变化), 得出比图 3-1a 更为有利的应力图式, 而且沿梁跨径上的弯曲应力非常均匀, 同时在荷载 Q 作用下梁没有挠度。

所以, 在预应力混凝土梁的设计中应该认真考虑下列几点:

(1) 预应力力筋布置成折线或某种形式的曲线使偏心距 e 变化, 使截面上的应力最有利。

(2) 总的预应力力筋用量要最小。

(3) 梁端永存应力要小而且应该均匀, 避免锚固处应力过分集中, 而导致水平裂缝的出现。

(4) 锚固的选择有利于受力与施工, 应力损失愈小愈好。

(5) 尽量使预弯矩(预应力引起梁的弯矩)与外荷载引起的一部分或全部分弯矩抵消, 达到平衡状态设计的要求。

如果我们用摩尔圆理论描述预应力施加的优点, 更能体现双向甚至三向预应力的优越性。下面作扼要介绍。

图3-2所示的素混凝土梁中, 在梁的中和轴以下取 ABCD 脱离体。它在轴向承受拉应力 σ_x 及剪应力 τ 。在 σ, τ 标轴上绘摩尔圆得到主拉应力 $\sigma_{\pm拉}$ 及主压应力 $\sigma_{\pm压}$ 。但 $\sigma_{\pm拉}$ 要大于 σ_x 。总的受力情况无从改善。

如果施加纵向预应力来改善梁的受力状态, 则摩尔圆向右方移动, $\sigma_{\pm拉}$ 将减小很多, 混凝土开裂的危险性显而易见地缓和下来, 如图 3-3 所示。

如果在竖向也施加预应力, 例如在钢箍上张拉, 将给混凝土在竖向施加预应力 σ_y , 那么从材料力学有关公式, 得到拉应力的计算式,

$$\sigma_{\pm} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

当然, 施加双向预应力并不意味着主拉应力 $\sigma_{\pm拉}$ 不产生。要使混凝土梁上不出现主拉应力, 则 $\sigma_{\pm拉} = 0$, 其条件式为:

$$\tau = \sqrt{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (3-2)$$

如果横向也预加预应力, 则整个自由体 ABCD 处于三向受压, 构

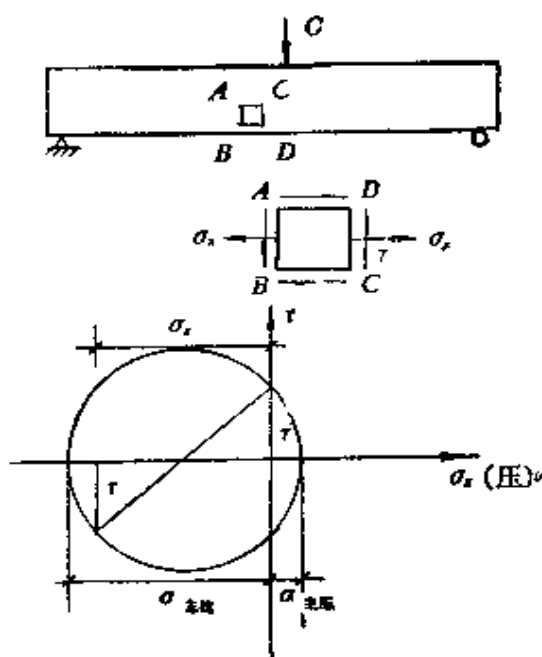


图 3-2 素混凝土梁脱离体 ABCD 受力状态及摩尔圆

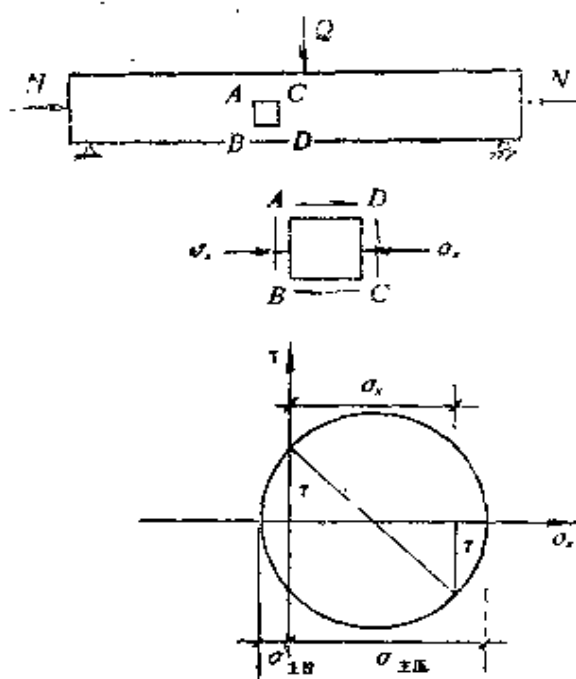


图 3-3 纵向预应力梁受力
状态及摩尔圆

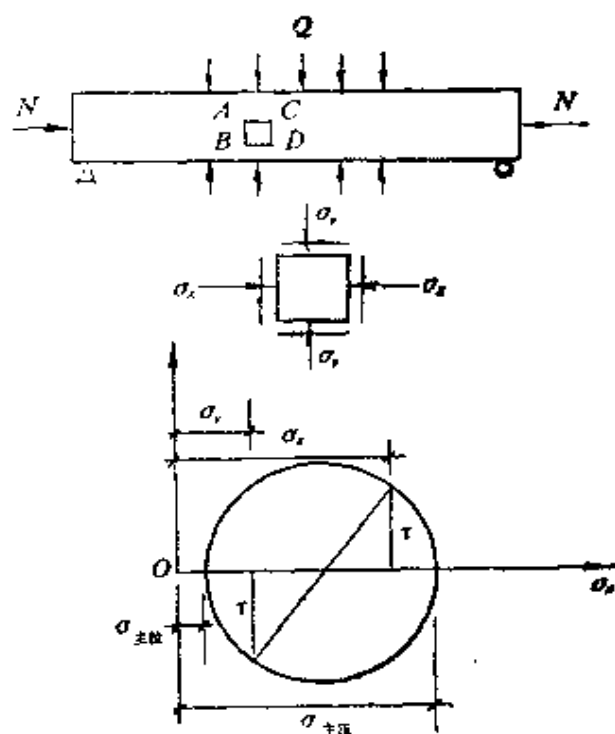


图 3-4 双向预应力混凝土梁受力的摩尔圆

件永远不会破坏。重庆长江公路大桥的 T 构就采用三向预应力，目的就是使混凝土不出现主拉应力，混凝土出现裂缝的可能性不复存在。

3.3 等效荷载与林同炎 (T.Y. Lin) 的平衡理论

3.3.1 等效荷载

等效荷载就是将预加力根据力筋不同的外形，换算成作用在梁上的均布荷载或集中荷载。这种换算的等效荷载对设计者在截面的设计上有很大启示。等效荷载给人们对于预应力梁的受力有清晰的概念。

(1) 预应力在超静定结构上引起的内力

$$M_{\text{预}} = M_{\text{主}} + M_{\text{次}} \quad (3-3)$$

这里 $M_{\text{主}}$ ——由于预加力作用在梁上引起的弯矩；

$M_{\text{次}}$ ——由于预加力作用在超静定结构上引起支座反力，此反力在梁上引起的弯矩；

$M_{\text{预}}$ ——由于预加力在超静定结构上引起的弯矩。

如果用数学式表达 $M_{\text{支}}$ 及 $M_{\text{跨}}$ 则

$$M_{\text{支}} = -l, y \quad (3-4)$$

$$M_{\text{跨}} = Ax + B \quad (3-5)$$

(3-4)式的负号说明由于预加力引起的弯矩,与荷载引起梁上的弯矩相反。(3-5)式中次力矩引起的弯矩与梁跨有关。

在上式中 N ——预应力力筋的合力;

y ——预应力合力点到换算截面重心的距离;

x ——以梁端为原点,沿梁长的距离;

A, B ——待定常数。

故
$$M_{\text{预}} = -Ny + Ax + B$$

对于预应力静定结构, $M_{\text{支}} = 0$, 则 $M_{\text{预}} = -Ny$

(2) 预应力沿预应力力筋不变时的等效荷载

(a) 曲线预应力力筋的等效荷载

从材料力学得知,弯矩与均布荷载的关系为:

$$q(x) = -\frac{d^2 M}{dx^2}$$

$$q(x) = -\frac{d^2}{dx^2} (-Ny + Ax + B) = \frac{d^2}{dx^2} (Ny) \quad (N \text{ 为常数})$$

$$\therefore q(x) = N \frac{d^2 y}{dx^2}$$

如果预应力力筋的形状为二次抛物线,其外形如图 3-5 所示, y 的坐标可用端部坐标及梁的矢高表示

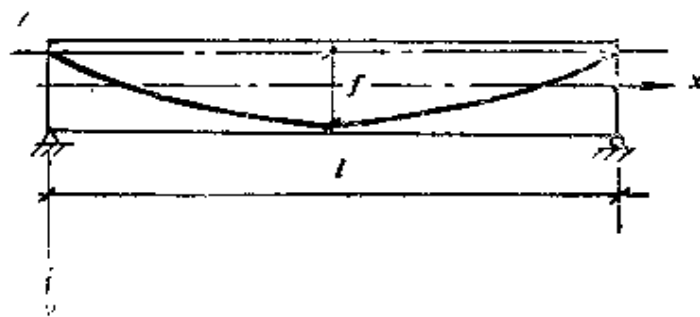


图 3-5 预应力力筋布置为二次抛物线

$$y = -\frac{4f}{l^2}x^2 + \frac{4f + y_a - y_0}{l}x + y_0$$

式中, l ——抛物线形的跨径;

f ——抛物线的矢高, $f = y_l - \frac{1}{2}(y_l + y_0)$;

y_0, y_l, y_a 相应于 $x=0, \frac{l}{2}, l$ 点的 y 值。

将上式 y , 微分两次, 则

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2}$$

式中的负号表明, 等效荷载的符号和抛物线的矢高 f 符号相反, 矢高为正时, 等效的均布荷载是向上的。

$$\therefore q(x) = -\frac{8Nf}{l^2} \quad (3-6)$$

(b) 折线预应力力筋的等效荷载

折线预应力力筋(图 3-6) 折点 a_1 左侧的弯矩 M_1 为

$$M_1 = -N(y_0 + x\sin\theta_1) + Ax + B$$

折点 a_1 右侧弯矩 M_2 为

$$M_2 = -N[y_a + (a - x)\sin\theta_2] + Ax + B$$

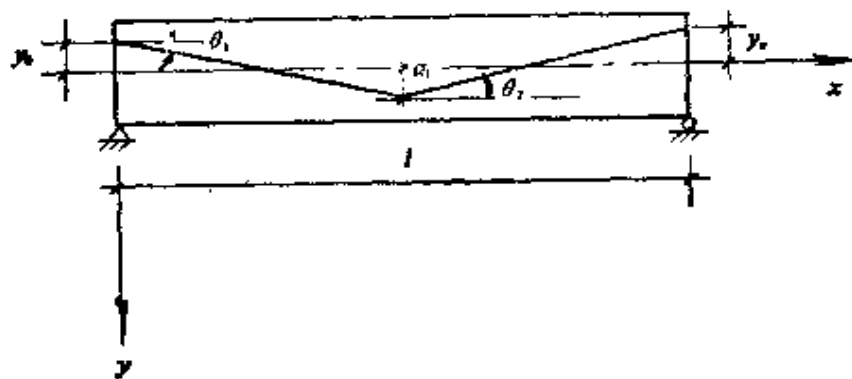


图 3-6 折线配索的预应力混凝土梁

由材料力学得知, 集中荷载和剪力有如下关系

$$-P = [Q_2]_{x=a_1} - [Q_1]_{x=a_1}$$

$$Q_1 = \frac{dM_1}{dx} = -N\sin\theta_1 + A$$

$$Q_2 = - \frac{dM_2}{dx} = N \sin \theta_2 + A$$

$$\therefore P = -N(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \quad (3-7)$$

等式(3-7)右边负号表明, 预应力力筋折角向下时, 等效集中荷载的方向是向上的。至于预应力沿预应力力筋变化时的等效荷载的推导可查阅本章参考文献[1]。

3.3.2 林同炎平衡理论

平衡荷载的概念是从等效荷载的概念演绎出来的。它是继弹性应力法和极限强度法以后第三种预应力结构设计和分析方法, 也是美籍华人、世界著名预应力专家林同炎教授在预应力理论方面的重大代表作。这篇论文发表在美国混凝土学会学报 1963 年第 6 期。(参阅本章参考文献[2])。这里介绍基本概念及其内涵。

平衡荷载法是把预应力看作主要是来平衡一部分作用在结构上的荷载的一个力, 这个力的大小是由人们自由选择的。选择的准则是作用在结构上的荷载减去平衡荷载所产生在素混凝土的上下边缘应力不得超过容许应力值。如图 3-7 所示



图 3-7 平衡荷载

参考图 3-7, 可得到

$$q = - \frac{8 N \cos \theta e}{l^2}$$

式中, q ——预应力提供的向上均布荷载的集度 (kN/m),

N ——预加力 (N);

e ——预应力力筋的合力距截面形心的距离;

θ ——预应力力筋的合力在梁端与水平线所做的夹角;

l ——梁的计算跨径, 即支座到支座的水平距离。

假如梁承受的设计荷载的集度为 $w(\text{kN/m})$,

当 $q = w$, 则截面将不承受应力

$q = \alpha w$, α 为一系数, 则 $(1 - \alpha)w$ 是由素混凝土梁所承受的荷载集度, 在此集度作用下算出的最不利截面的应力, 其上下纤维都在容许应力范畴, 这片梁就能满足要求。

从理论上讲预加力可以很大, 梁高能够设计很低, 但过大的预加力无法施加在有限度的截面面积上, 因为混凝土的极限强度是有限的, 过大的预加力虽然有时使混凝土的强度不破坏, 但是结构将失去稳定。在大跨径桥梁上, 预加力引起的平衡荷载只能抵消恒载加上一部分活荷载(包括冲击)。

平衡荷载法优点之一是便于计算挠度, 容易估出预加力的大小。由于该方法概念清晰给人们估索与受力方面提供许多方便。计算示例可阅读本章参考文献[2]

3.4 弹性应力法及马涅耳图解法的应用

3.4.1 弹性应力法

弹性应力法就是在结构上预施预应力后, 去计算它的应力状态, 无论预加力加自重或预加力加恒载与活载(包括冲击), 其截面的上下边缘应力(无论是拉或压)均不能超过容许应力。

如图 3-8 所示, 从材料力学公式可算出弯曲应力为:

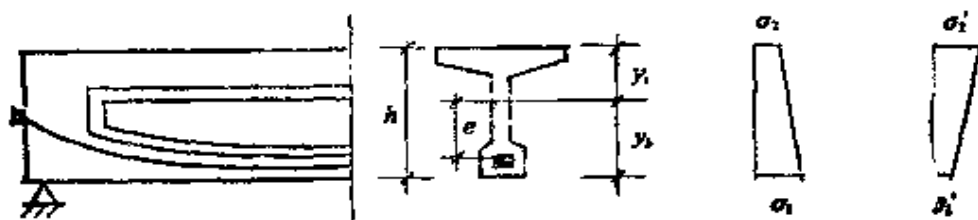


图 3-8 预应力混凝土梁容许应力

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ney}{I} + \frac{My}{I} \quad (3-8)$$

式中: N ——施加的预加力;

A ——混凝土截面面积(毛截面);

I ——混凝土截面对形心的惯矩;

M ——自重及外活载引起的弯矩;

y ——从截面形心到任意纤维的距离,从中和轴向上量为正;

e ——预加力的偏心距,从中和轴向上量测为正号,反之为负号。

$$\frac{I}{y} = W, W \text{ 为截面模量。}$$

将(3-8)式重新整理,有下列形式:

$$e = (\sigma W - M) \frac{1}{N} - \frac{W}{A} \quad (3-9)$$

假定这里有四个约束量,即在预应力加自重时,梁上下翼缘的应力不超过 σ_2, σ_1 ; 同时在预应力加自重加活载作用下,截面上下翼缘应力不超过 σ'_2, σ'_1 。 $\sigma_2, \sigma_1, \sigma'_2$ 及 σ'_1 均为定值。

这样, (3-9)式转换成以 e 与 N 为未知量的四个直线,即

$$\begin{aligned} \text{线①} \quad & e = (\sigma_2 W_t - M_s) \frac{1}{N} - \frac{W_t}{A} \\ \text{线②} \quad & e = (\sigma_1 W_b - M_s) \frac{1}{N} - \frac{W_b}{A} \\ \text{线③} \quad & e = \left[\frac{\sigma'_2 W_t - (M_s + M_p)}{R} \right] \frac{1}{N} - \frac{W_t}{A} \\ \text{线④} \quad & e = \left[\frac{\sigma'_1 W_b - (M_s + M_p)}{R} \right] \frac{1}{N} - \frac{W_b}{A} \end{aligned} \quad (3-10)$$

这里,除已定义过的符号外,尚有:

W_t ——对混凝土上翼缘的截面模量 $\frac{I}{y_t}$;

y_t ——截面形心到上翼缘距离;

W_b ——对混凝土下翼缘的截面模量 $\frac{I}{y_b}$;

y_b ——截面形心到下翼缘距离;

M_s ——梁自重引起的弯矩;

M_p ——二期恒载及活载引起的弯矩;

R ——为传递锚固后,预应力损失系数, $R = \frac{N_i - N_o}{N_i}$;

N_i ——初始预加力;

N_o ——永存预加力。

根据(3-10)式, 在 $\frac{1}{N}$ 与 e 的坐标轴上, 可绘成四条直线。如果 σ_2 , σ'_2 , σ_1 和 σ'_1 已知, 截面特征值, I , A , y_t , y_b 均已知后可以解出 N 与偏心距 e , 这就是弹性应力法基本内容。

3.4.2 马涅耳图解法

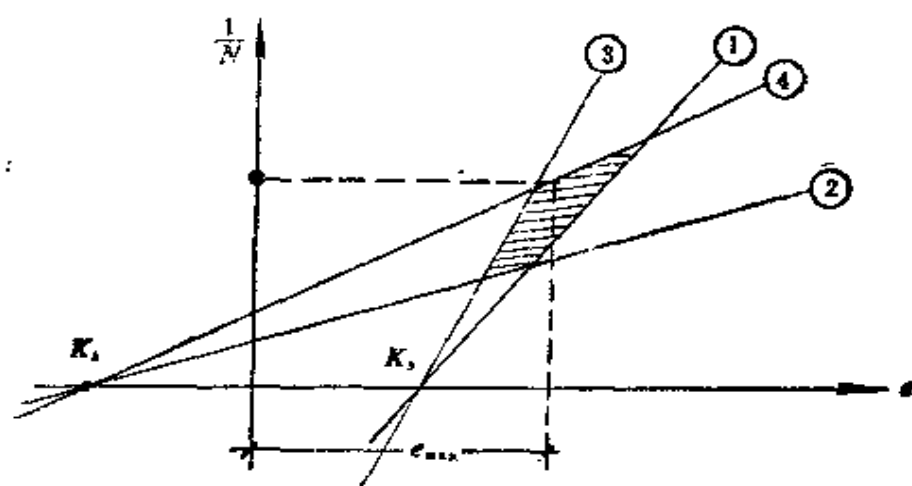


图 3-9 马涅耳图解法

继预应力混凝土创始人法国弗莱西奈 (F. Freyssinet) 发明 F 式锚具, 并采用高强钢丝做成预应力构件之后。比利时肯特大学马涅耳教授不仅发明马涅耳三明治锚头而且提出马涅耳图解法, 对合理的 N 与 e 值得到优选。将(3-10)四条直线绘在以 $\frac{1}{N}$ 为横坐标, e 为纵坐标上的图上, 发现线③与线①相交在截面的下核心点, 线④与线②相交于上核心点上。取 e_{max} , 则 $\frac{1}{N}$ 为最大, 即预加力为最小。 e 取最大值但要根据在最不利截面布索的构造要求所决定的。 $\frac{1}{N}$ 取最大值, 则 N 力为最小这样节约预应力力筋的用钢量。

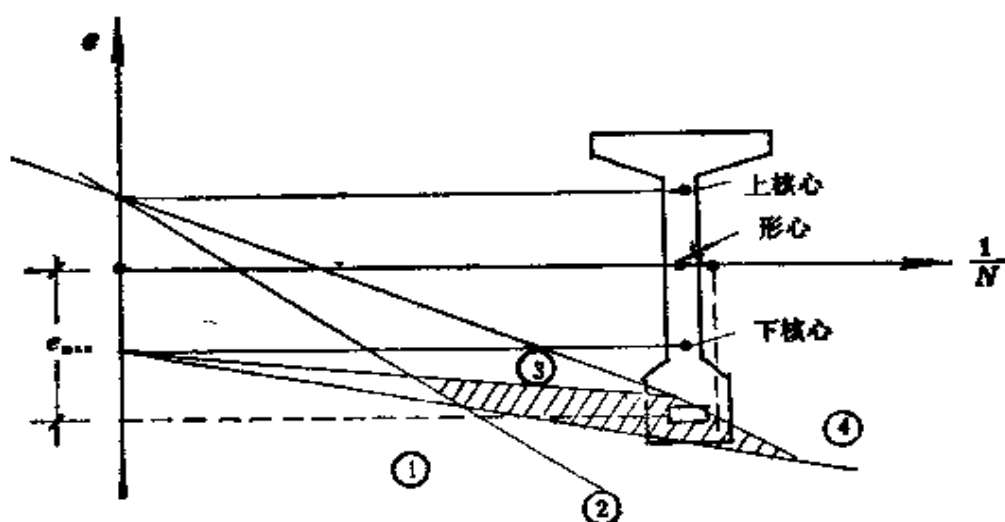


图 3-10 修正后的马涅耳图

马涅耳的图解法虽好，但有缺点。有些学者近年来作些修正与讨论，详细论述参阅本章参考文献[3]，[4]。

如图 3-10 所示，如果 e 为横坐标， $\frac{1}{N}$ 为纵坐标，并将截面尺寸划在图的右侧，可以直接得到偏心距 e 的位置。这个修正后的图形要比图 3-9 更为直观。

3.5 预拉预压混凝土梁的设计与示例

本节将从理论上探讨双向预应力混凝土梁的经济设计以及低高度梁与双向预应力之间的内在联系并通过具体示例来说明预压钢筋根数的估算。

为了达到低高度，采用预拉预压的双向预应力（这与本章 3.2 节所论及的双向预应力不同，这里讨论的双向是指在混凝土受压区对混凝土施加拉力，而在混凝土受拉区给混凝土施加压力）。用这种一拉一压的方法来提高梁的承载能力，降低梁的建筑高度。从理论上讲可以使全部使用荷载作用下，控制截面（最不利截面）的应力达到“零点”应力状态，在混凝土受压区通过顶压钢筋使混凝土产生拉应变，这适合于大跨径桥梁上使用，因为跨径加大后由恒载与活载（包括冲击）产生了过大的压应力、单靠在混凝土受拉区施加单向预应力无法消除梁上翼缘

由外荷载引起的压应力。即使减小偏心距使预应力作用下在梁上翼缘产生较大的拉应力也无济于事，反而造成在外荷载作用混凝土上下翼缘产生拉应力。在上述情形下预拉预压的措施才能奏效。

预压混凝土也是最近一些年发展起来的新构思。它是由英国比利克(K. Billig)在1950年首先倡议。后来由德国马德尔(F. W. Mader)及奥地利瑞芬斯图尔(H. Reiffenstahl)发展并付诸于实现的。奥地利的阿尔姆(Alm)桥是世界最大的简支梁桥。跨径为74.5 m，梁高在跨中只用2.5 m (如采用普通预应力混凝土梁高为4.5 m)就是采用双向预应力，达到低高度的目的，梁高折合成跨径为 $\frac{1}{30.4}$ 的新记录。日本Kawabata bash 人行桥跨径57.88 m 跨中梁高用了1.55 m，合 $\frac{1}{37.1}$ 的跨径。同时又建成 Makiyose bash 公路桥，跨径仅有29.2 m，跨中梁高只用1 m，合 $\frac{1}{29.2}$ 的跨径。这些桥均成功地采用预拉预压混凝土达到低高度梁的目的。详细报导参阅本章参考文献 [5]。我国在这方面虽然有了一些初步研究，但尚属空白。

3.5.1 预拉预压预应力力筋的估算公式推导

当梁的上下翼缘的施加预应力时，如图3-11所示，

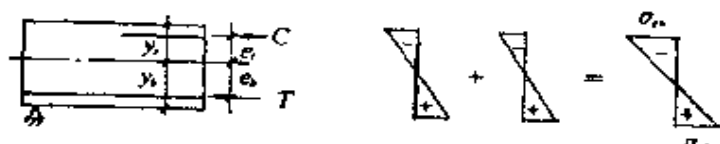


图3-11 施加预拉预压预应力时引起梁的上下翼缘应力

此时，混凝土上、下翼缘产生的应力分别用下面两式表示：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ct} &= \frac{T-C}{A} - \frac{T \cdot e_t + C \cdot e_n}{I} y_t \\ \sigma_{cb} &= \frac{T-C}{A} + \frac{T \cdot e_t + C \cdot e_n}{I} y_b \end{aligned} \right\} \quad (3-11)$$

式中， T ——预拉力(力筋受拉，但对混凝土为受压，请注意图3-11中力的方向)；

C ——预压力(钢筋受压,但对混凝土为受拉);

A ——混凝土截面面积(毛截面);

I ——混凝土截面对其形心的惯性矩;

e_t ——混凝土截面形心到预拉力的距离;

e_b ——混凝土截面形心到预压力的距离;

σ_{ct} ——在 C 与 T 作用下混凝土上翼缘的拉应力;

σ_{cl} ——在 C 与 T 作用下混凝土下翼缘压应力;

负号表示混凝土受拉,正号表示受压。

在外荷载作用下包括自重、二期恒重、汽车或挂车荷载)对于简支梁而言,梁的上翼缘产生压应力,而下边缘产生拉应力。当外荷载产生的应力与预拉预压产生的应力相叠加后,则产生如图 3-12 所示的结果

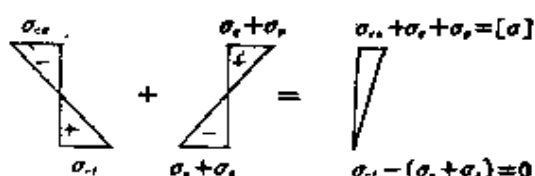


图 3-12 预拉预压引起的应力与外荷载产生的应力叠加

为了发挥混凝土优越的抗压强度,避免它的抗拉性差的缺陷,我们规定在使用状态下,上翼缘的应力不得超过容许的混凝土压应力 $[\sigma]$,而在梁的下翼缘应力等于零。这样将使设计出来的截面发挥应力的承载能力,因此

$$\left. \begin{aligned} \frac{T-C}{A} + \frac{T e_b + C e_t}{I} y_b - (\sigma_s + \sigma_p) &= 0 \\ \frac{T-C}{A} - \frac{T e_b + C e_t}{I} y_t + (\sigma_s + \sigma_p) &= [\sigma] \end{aligned} \right\} \quad (3-12)$$

式中, σ_s ——为自重引起截面上的应力;

σ_p ——为二期恒载与活载(包括汽、挂和冲击)引起的应力;

$[\sigma]$ ——为混凝土容许弯曲压应力。

如果令 $\frac{C}{T} = \alpha$, $\frac{e_t}{e_b} = \beta$, 则(3-12)可简化为

$$\left. \begin{aligned} (1-\alpha) \frac{T}{A} + (1+\alpha\beta) \frac{T e_b}{I} y_b - \frac{M_s + M_p}{W_b} &= 0 \\ (1-\alpha) \frac{T}{A} - (1+\alpha\beta) \frac{T e_t}{I} y_t + \frac{M_s + M_p}{W_t} &= [\sigma] \end{aligned} \right\} \quad (3-13)$$

再令 $M_s + M_p = \theta$; $\frac{I}{y_b} = W_b$, $\frac{I}{y_t} = W_t$; $\frac{I}{A} = r^2$; W_t, W_b

均在(3-10)式下定义过。 r 为截面回转半径。

通过(3-13)式,最后解得:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 1 - \frac{[\sigma] A}{h T} y_b \\ \beta &= \frac{h \theta - [\sigma] T - h T e_b}{[h T - [\sigma] A y_b] e_b} \end{aligned} \right\} \quad (3-14)$$

式中, h ——为梁高, 等于 $y_t + y_b$

为估算力筋根数, 可再令 $\xi = \frac{[\sigma] \cdot A}{h} y_b$, 则有

$$\frac{C}{T} = 1 - \frac{\xi}{T}; \quad C = T - \xi,$$

又已知 $\beta = \frac{e_t}{e_b}$, 则

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{h \theta + [\sigma] (A y_b e_t - I)}{(e_t + e_b) h} \\ C &= T - \xi \end{aligned} \right\} \quad (3-15)$$

对于矩形截面, $y_b = y_t = \frac{h}{2}$; $A = b \cdot h$, 从(3-14)式第一式中得到

$$\alpha = 1 - \frac{[\sigma] b h}{2 T}, \quad C = T - [\sigma] \cdot \frac{b h}{2}, \text{ 这样解得梁高}$$

$$h = \frac{2(T - C)}{b[\sigma]}$$

如果采用单向预应力, $C = 0$ 则 $h = \frac{2T}{b[\sigma]}$ 。

如果采用预拉预压, 一般 $C \approx \frac{T}{3}$ 左右, 则 $h = \frac{1.33T}{b[\sigma]}$ 因此在

矩形截面上采用预拉预压梁高约为 66.7% 的单向预应力的梁高。故预拉预压预应力混凝土梁比单向预应力混凝土梁的梁高还要小, 这将给桥梁的施工, 净空的要求带来方便。参阅本章参考文献[6]。

3.5.2 示例

取 $L = 50 \text{ m}$, 计算跨径 $l_p = 48.8 \text{ m}$, 桥宽 7 m 外加 $2 \times 2 \text{ m}$ 人行

道。设计荷载为汽-20, 验算荷载为挂-100, 人群荷载为 3.5kN/m^2 试设计预拉预压双向预应力简支梁, 梁高采用 $\frac{l}{40} = 1.25\text{m}$, 以满足净空的要求。

(1) 采用材料、预应力力筋采用 $\phi 5$ 高强碳素圆钢丝, 标准强度 $R_y^b = 1600\text{MPa}$, 弹性模量 $E_y = 2.0 \times 10^5\text{MPa}$ 。非预应力钢筋采用 I 级钢。预压钢筋采用 $\text{II} 32\text{N}$ 级粗钢筋(冷拉), 其极限标准强度 $R_{py} = 750\text{MPa}$, 相应弹性模量 $E_{py} = 2 \times 10^5\text{MPa}$ 。主梁采用 50 号混凝土, 路面垫层及人行道板采用 40 号混凝土。

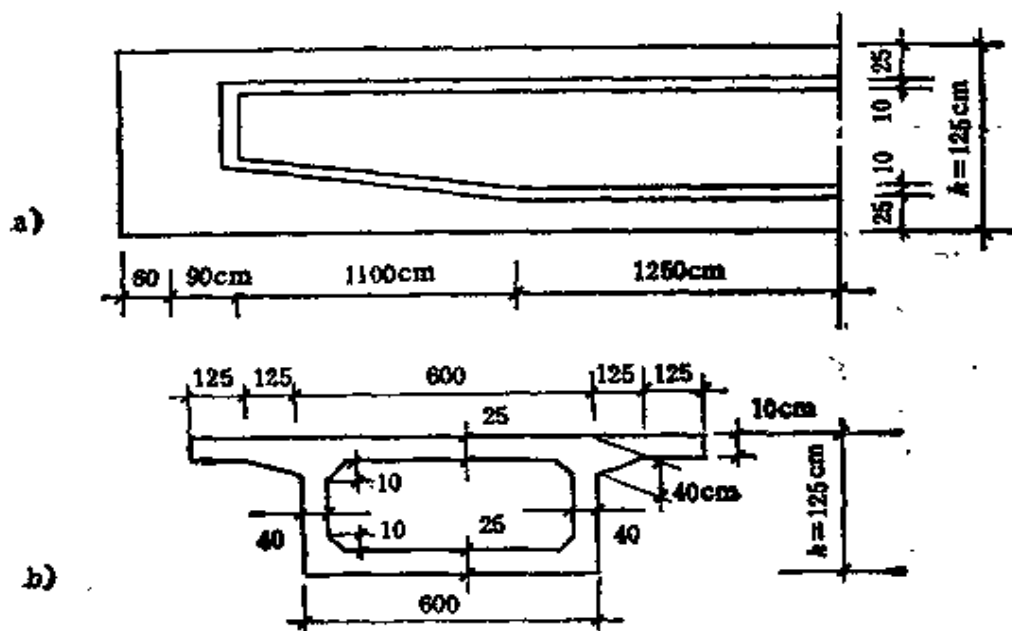
(2) 工艺: 采用后张法, 及后压法。

(3) 主梁纵、横剖面及尺寸参见图3-13。

(4) 计算内容

(a) 跨中截面特征

截面面积 $A = 43675\text{cm}^2$, 截面对底板边缘静矩 $S = 3056250\text{cm}^3$, $y_b = 70\text{cm}$, 截面惯矩 $= 0.976\text{m}^4$



(a) 纵剖面尺寸

(b) 跨中横截面尺寸

图 3-13 $l_p = 48.8\text{m}$ 预拉预压混凝土梁纵、横剖面尺寸(纵横比例尺不同)

(b) 内力计算

如果任一截面距左支点距离为 a ，距右支点距离为 b ，则 $\frac{a}{l} = \alpha$

当承受均布荷载 q 时，

$$\text{弯矩} \quad M = \frac{\alpha}{2} (1 - \alpha) q l^2$$

$$\text{剪力} \quad Q = \frac{1}{2} (1 - 2\alpha) q l$$

对于汽-20、挂-100、人群荷载 $2 \times 0.35 \times 2 = 14 \text{ kN/m}$

跨中内力表

表 3-1

$\alpha = \frac{1}{2}$	荷 载							
	自重	二期恒载	恒载总计	汽-20	挂-100	人群	组合 (恒+人+汽)	组合 I (挂+恒)
$M \text{ kN}\cdot\text{m}$	32600	10570	43170	10140	11700	4354	57664	54340
$Q \text{ kN}$	0	0	0	320	456	0	320	456

(c) 预应力筋及预压钢筋的计算

i) 预拉力筋 $h = 1.25 \text{ m}$ $\theta = M_g + M_p = 57664 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$$[\sigma] = 0.5 R_g^b = 0.5 \times 35 = 17.5 \text{ MPa}$$

$$A = 4.3675 \text{ m}^2 \quad y_b = 0.7 \text{ m} \quad e_t = 0.4 \quad e_b = 0.575 \text{ m} \quad I = 0.976 \text{ m}^4$$

代入(3-15)式中第一式

$$\begin{aligned} T &= \frac{h\theta + [\sigma](Ay_b e_t - I)}{(e_b + e_t)h} \\ &= \frac{1.25 \times 57664 + 17.5 \times 10^3 (4.3675 \times 0.7 \times 0.4 - 0.976)}{(0.575 + 0.4) \times 1.25} \\ &= 62700 \text{ kN} \end{aligned}$$

$\phi 5$ 面积 0.19625 cm^2 ， $18\phi 5$ 面积 3.5325 cm^2 ，预应力力筋控制应力 $0.8 \times R_g^b = 1280 \text{ MPa}$ ，故采用 $18\phi 5$ 的力筋根数 n 为

$$n = \frac{62700 \times 1000}{0.7 \times 1280 \times 1000 \times 3.5325} = 19.8 \text{ 根用 20 根索}$$

ii) 预压粗钢筋(梁的受压区)用Ⅱ32 N 级钢筋冷拉。

$$\xi = \frac{[\sigma] A}{h} y_b = \frac{17.5 \times 10^3 \times 4.3675 \times 0.7}{1.25} = 42802 \text{ kN}$$

$$C = T - \xi = 62700 - 42802 = 19898 \text{ kN, Ⅱ32 面积为 } 8.04 \text{ cm}^2$$

$$n' = \frac{1989.8 \times 1000}{0.8 \times 7500 \times 8.04} = 41 \text{ 根}$$

至于应力验算、构造细节及施工工艺,在此不介绍。

3.6 预弯预应力混凝土梁的介绍

本节介绍预弯预应力混凝土梁(简称预弯梁)的意义及物理概念。对预弯梁的优越性及制造工艺做一简要说明。同时提出正截面强度的数学模式,辅以正截面强度的试验结果,并与非预弯的劲性加筋梁作了对比。

早在本世纪 40 年代末期,比利时的阿·利普斯基(A.Lipsky)就提出了预弯的概念。当时欧洲各国正处在战后经济恢复时期,预弯梁因其现场施工工程量少,吊装重量轻,得到了欧洲工程界人士的重视,主要用于港口、桥梁、地下结构及房屋建筑等工程中。近年来,结构要求向轻型化发展,预弯梁以其建筑高度低、施工方便等优点,又一次被欧洲各国广泛采用。

3.6.1 预弯梁的意义及制造过程

利用一根屈服强度较高的、预制成上拱度为 f_0 的工字型钢梁作受力工具,其上拱度 f_0 由钢材的容许应力及截面特性决定。然后,在梁的 $\frac{l}{4}$ 处施加两个相等的集中荷载,当钢梁压到水平时,在钢梁的下翼缘浇筑矩形(或其他形状)截面的高标号混凝土,这一阶段浇筑的混凝土,称之为第一期混凝土。待达到一定强度,撤除外力,梁即回弹。这时,下翼缘混凝土则受到压应力。梁回弹的大小是检查预弯梁满足使用的指标。如果回弹满足设计要求,再浇筑腹板及上翼缘混凝土,这一

部分混凝土称之为二期混凝土。通过这种方法得到钢与混凝土的组合构件称为预弯梁。

预弯梁制造过程分为三个阶段：钢梁制造阶段；一期混凝土浇筑阶段；二期混凝土浇筑阶段。

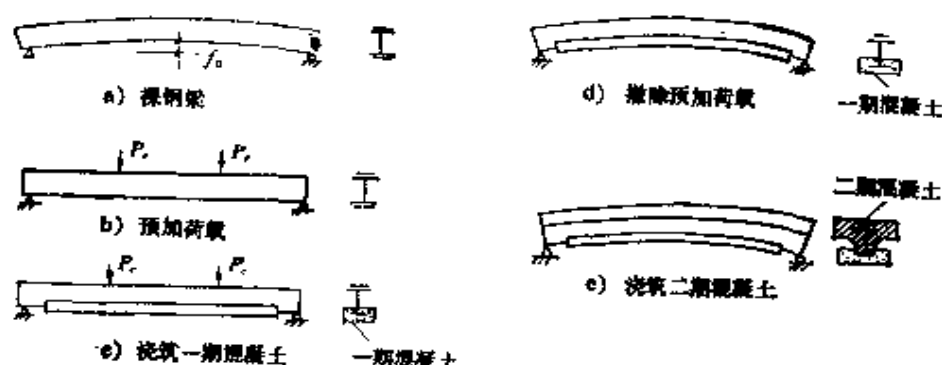


图 3-14 预弯梁的制作过程

钢梁的制造：制造一根在自由状态(没有支承)时带有上拱度 f_0 的工字型钢梁。

一期混凝土浇筑：钢梁为具有上拱度 f_0 简支梁，在梁跨四分点上施加两个相等的集中力 P_0 ，使钢梁达到水平，然后立模在钢梁下翼板浇筑一期混凝土。待一期混凝土达到设计强度后，撤除 P_0 力，这时带有一期混凝土的钢梁将回弹，其上拱度为 f_1 ； $f_1 < f_0$ 。

$$f_0 = \frac{11}{384} \frac{P_0 l^3}{E_h I_{gh}} - \frac{5}{384} \frac{q_0 l^4}{E_h I_{gh}} \quad (3-16)$$

式中， f_0 ——回弹量；

P_0 ——施加在四分点的集中力；

l ——梁的计算跨径；

E_h ——下翼板混凝土的弹性模量；

I_{gh} ——钢梁带下翼板混凝土对组合截面形心的惯性矩；

q ——组合截面梁的自重集度。

二期混凝土浇筑： P_0 力撤除后，就可开始浇筑第二期混凝土，最后形成钢梁包在混凝土内的预弯梁。

这种 I 型钢梁，当下翼板镶嵌一期混凝土中时，可以作为前期在下缘

混凝土产生预应力的工具。在二期混凝土浇筑之后（指包裹在钢梁腹板及上翼板的混凝土），钢梁就全包在在混凝土内了，这也称带有劲性加筋（指钢梁）的预弯预应力混凝土梁，来承受二期恒载及活载（包括汽车、挂车、人群及冲击）。

预弯梁制造各阶段的示意图在图 3-14 中表示。

3.6.2 预弯梁的经济、技术优点

预弯梁除了具备预应力混凝土的优点外，还具有技术工艺上的诸多优越性。

(1) 建筑高度低，跨高比可达 40~45；

(2) 无需锚具设备，避免张拉操作。在拼装方面有接近于钢结构的优点，工业化生产程度高，运输方便；

(3) 在制造过程中，每根成品梁均受加载和卸载的考验，因此，构件安全可靠。

(4) 梁的弹性好，截面稳定性优越，抗裂性强；

(5) 减少施工、架设时间及现场浇筑混凝土的工作数量；

(6) 减少养护费用（这是与钢结构相比），在用钢量方面与普通预应力混凝土相比，可能略费一些，但因为它的使用，可以大大节省填土、挡土墙、引道长度等工作量显著。

3.6.3 预弯梁的正截面极限强度

预弯梁在下翼缘混凝土开裂以前，正截面应力分析方法与一般组合构件分析方法相似。

预弯梁与一般预应力混凝土相似，加载过程中的应力变化是：先抵消预加力产生的初始压应力，然后再引起恰好等于下翼缘混凝土抗拉压力的拉应力。因此预弯梁的开裂弯矩为

$$M_{cr} = (R_t - \sigma_{cb2}) W_{cb2} \quad (3-17)$$

式中， R_t 为一期混凝土极限抗拉应力（这与 R'_t 有区别， R'_t 是在达到标准强度一个百分比的极限抗拉应力）； σ_{cb2} 为二期混凝土结硬后，一期混凝土中的压应力， W_{cb2} 为二期混凝土结硬后，整个预弯梁截面的下缘抗弯模量。

关于预弯梁的正截面极限强度,根据材料力学理论,给出以下的近似估算方法。在弯矩最大的截面下翼缘混凝土开裂后,钢梁下翼缘先达到流限。当钢的塑性区具有一定高度时,上翼缘混凝土被压碎。在计算中用到下列几点基本假定:

(1) 受拉区混凝土退出工作后,拉力全部由钢梁承担;

(2) 受压区混凝土应变受到钢材的限制,上翼缘部分混凝土全部进入塑性。由于有钢梁上翼板的存在,这部分混凝土极限压应力有所提高,达到混凝土标号 R ;

(3) 受拉区钢梁下翼缘应力达到钢的流限 σ_s , 钢腹板下部有高度 h_u 进入塑性,应力均达到 σ_s ;

(4) 受压区钢上翼缘应力表示为 $\alpha\sigma_s$; $0 < \alpha < 1$ 。钢梁截面变形符合平面假定。钢与混凝土粘结后没有滑动;

(5) 不考虑混凝土收缩、徐变等时间变形的影响。

(6) 预弯梁在极限状态下退化成劲性加筋的混凝土梁。

正截面极限强度图式如图 3-15

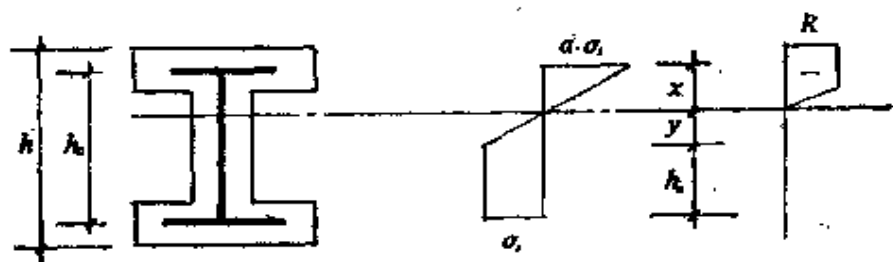


图 3-15 极限状态计算图式

下面用平截面假定及力的平衡求解图 3-15 所示的未知数 x, y, h_u 和 α 。当这四个参数确定后,极限弯矩即可求得。

预弯梁在极限状态下,钢上翼缘的压应力可根据变形协调条件得到

$$\sigma_{st} = \alpha\sigma_s = \frac{E_s}{E_h} R \quad (3-18)$$

式中, σ_{st} ——钢上翼缘应力;

E_s ——钢的弹性模量;

E'_k ——上翼钢板形混凝土极限弹性模量 $E'_k = \frac{1}{1.15} E_h$, E_h 为混凝土弹性模量

由此, 可得
$$\alpha = 1.15 \frac{E_g}{E_h} \frac{R}{\sigma_s} \quad (3-19)$$

钢非塑性部分应力呈直线分布, 参见图 3-14, 故

$$\alpha \frac{\sigma_s}{\sigma_s} = \frac{x}{y}; \quad y = \frac{1}{\alpha} x \quad (3-20)$$

$$h_0 = h_g - x - y \quad (3-21)$$

从力的平衡方程为:

$$D_c + D_{gt} + D_{gf} = Z_f + Z_b \quad (3-22)$$

式中, D_c ——受压区混凝土的压力;

D_{gt} ——钢上翼缘板的压力;

D_{gf} ——钢腹板的压力;

Z_f ——受拉区钢腹板拉力;

Z_b ——钢下翼缘的拉力;

以上未知量均可由材料应力及截面特征表示。例如 D_c 可用受压区面积乘以混凝土应力联解方程 (3-20), (3-21), (3-22) 可得到 x , y , h_0 , 从而确定 D_c , D_{gt} , D_{gf} , Z_f 及 Z_b 值。各力对截面上边缘取矩可以得到正截面极限抵抗弯矩 M_j

$$M_j = D_c \cdot d_c + D_{gt} \cdot d_{gt} + D_{gf} \cdot d_{gf} + Z_f \cdot z_f + Z_b \cdot z_b \quad (3-23)$$

式中, d_c , d_{gt} , d_{gf} , z_f , z_b 分别为 D_c , D_{gt} , D_{gf} , Z_f 及 Z_b 的离上边缘的距离。

下面的式子, 表示预弯梁设计应予满足的条件:

$$M_j \geq M_u \quad (3-24)$$

式中, M_u ——计算的极限弯矩 ($= 1.2 M_g + 1.4 M_p$)

M_j ——正截面极限抵抗弯矩;

M_g ——截面恒载弯矩;

M_p ——截面活载弯矩 (汽车、二期恒载、人群、冲击)

8.6.4 试验梁的计算与试验

试验梁有两根, I 梁为预弯梁, II 梁为没有预弯的直钢梁外包混凝土两梁横截面相同(图 3-16), 梁长也一样跨径均为 4m。试验所用的

钢板为 5 mm 厚的 16 Mn 钢材弹性模量经过试验为 $E_s = 2.054 \times 10^5 \text{ MPa}$, 弹性极限值 $\sigma_s = 329 \text{ MPa}$,

I 梁混凝土实测标号:

一期混凝土: 56 MPa

二期混凝土: 25 MPa

II 梁混凝土实测标号:

一期混凝土: 53 MPa

二期混凝土: 20 MPa

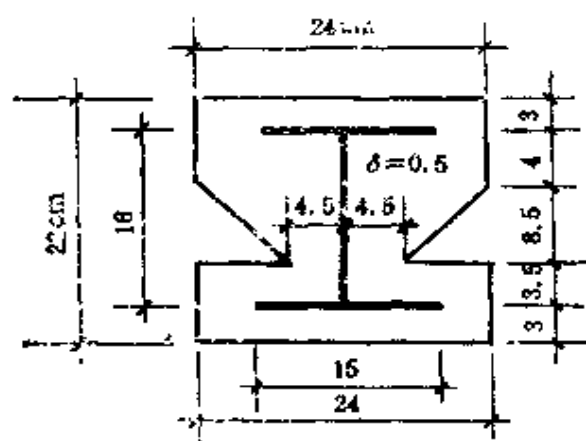


图 3-16 试验梁横截面图

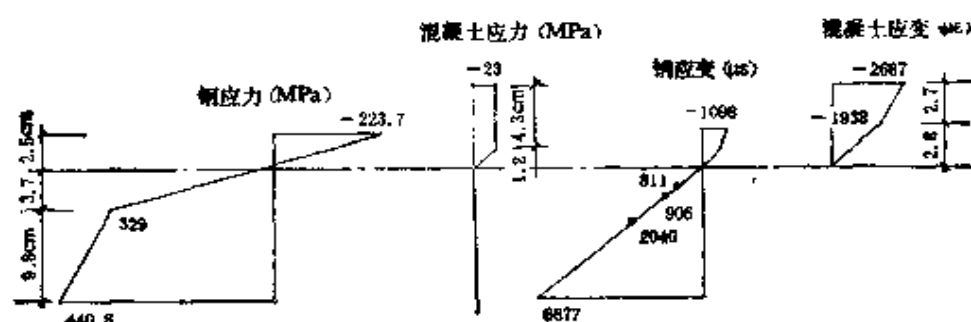


图 3-17 预弯梁极限状态下应力、应变分布

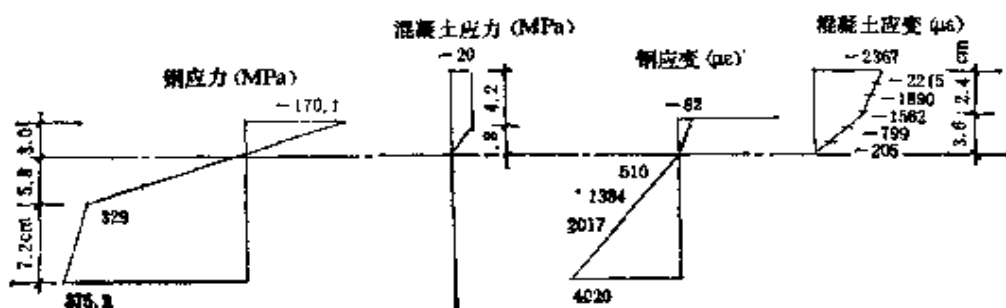


图 3-18 劲性加劲梁极限状态下应力、应变分布

预弯梁制造过程中,加力 $P_r = 22.5 \text{ kN}$ 。试验梁加载过程中,简支梁跨度 $l_0 = 3.9 \text{ m}$ 极限状态下试验梁跨中截面应力应变实测分布见图 3-17, 图 3-18。主要参数计算值与试验值列在表 3-2 中。结果表明上述正截面极限强度的计算方法是可行的。

主要参数计算值与试验值的比较

表 3-2

梁号	α		$h_u(\text{cm})$		距上钢缘距离 $x(\text{cm})$		开裂弯矩 $M_{cr}(\text{kN}\cdot\text{m})$		极限弯矩 $M_j(\text{kN}\cdot\text{m})$	
	实测	计算	实测	计算	实测	计算	实测	计算	实测	计算
I	0.65	0.63	9.8	9.38	2.5	2.56	35.3	36.8	61	58.3
II	0.52	0.55	7.2	5.57	3.0	3.7	9.4	8.6	56.2	54.3

从表 3-2 可以看出,预弯梁开裂弯矩为 $35.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$,而没有预弯的梁只有 $9.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 就开裂了。极限弯矩,从实测值看顶弯梁达 $61 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 而没有预弯的梁只有 $56.2 \text{ kN}\cdot\text{m}$ 。因此预弯梁通过钢梁预弯加力使下翼缘受到预应力大大提高开裂弯矩及极限承载力。深入了解预弯梁,建议阅读本章参考文献[7], [8], [9], [10], [11]和[12]。

3.7 预应力混凝土的发展与展望

预应力混凝土理论已趋成熟,其设计计算方法已广泛地被设计者采用。局部应力及抗裂性的计算尚待改进。自 1950 年我国第一根预应力混凝土梁在丰台桥梁厂试制成功以后,40 多年来预应力混凝土技术发展也是日新月异。特别在技术方面的开发做了许多工作。下面分两个方向回顾。

1. 先张法构件 从 16 m 跨径发展到 30 m。而国内大多数张拉合座均改用低松弛七股钢绞线,代替冷拉 IV 级钢。也有应用 V 级钢经过淬火热处理将强度提高到 $R_s^b = 1500 \text{ MPa}$,这样可省掉焊接,同时提高极限强度。

2. 后张法构件 新型锚具不断出现,如 XM 锚、QM 锚及 OVM

锚偏错冷铸镦头锚具张拉吨位可达 10000 kN 以上。另外高标号混凝土的采用使构件轻巧美观。在房屋结构上采用无粘结体系, 不仅能节约管道, 同时取消压浆工序。在桥梁结构上采用体外配索。除了小跨经桥梁外从跨径 12 m 到 200 m 以上几乎全用预应力混凝土构件; 另外体外配索也成为旧桥加固一种有效措施。

总之, 提高混凝土强度, 改进锚固措施, 研究低松弛、高强度钢材, 进一步降低造形, 减小预应力损失将使预应力混凝土的应用更为普及, 更加有生命力。请阅读本章参考文献[13], [14]。

本章参考文献

- [1] 陈永春, 陈国梅. 预应力超静定结构等效荷载计算。《建筑结构学报》, 1988 年第 9 卷第 2 期。
- [2] 林同炎. 预应力混凝土结构设计和分析的平衡荷载法。美国混凝土学会(ACI), 1963 年 6 月。
- [3] 印定安. 应用改良的麦尼耳图(Magnel) 确定预应力受弯构件的合理索界《重庆交通学院学报》, 1980 年第 1 期。
- [4] Natarajan Krishnamaurthy. Magnel Diagrams for Prestressed Concrete Beams. *Journal of Structural Engineering*, 1983. Dec
- [5] Motohiko Suzuki. Application of post-compressioning Prestressing System to Road Bridges. *Second International Conference on Short and medium Span Bridges Ottawa*, 1986, 1 p507 *Canadian civil Engineer Society*.
- [6] 张士铎. 预拉预压混凝土梁的设计与示例。《公路》, 1990.3。
- [7] 张士铎. 预弯预应力混凝土梁的介绍。《公路》, 1987.1。
- [8] 张士铎. 预弯预应力混凝土梁的初步设计。《公路》1987 5。
- [9] 陆亚芳, 张士铎. 预弯梁及其正截面强度, 《土木工程学报》, 1989.8。

- [10] 郑绍雄,谢康强. 预弯预应力混凝土梁设计与施工.《公路》, 1992.10.
- [11] 周光雁,周义武. 预弯梁回弹量与挠度计算方法的探讨.《重庆交通学院学报》, 1990 年 12 月.
- [12] 印定安. 预弯预应力混凝土梁的实践和认识.《重庆交通学院学报》, 1991 年 12 月.
- [13] 项贻强. 预应力技术及在桥梁工程中的应用和展望.《华东公路》, 1993.1.
- [14] 张小兵. 体外预应力.《重庆交通学院学报》, 1985 年 8 期.

第四章 部分预应力混凝土理论

本章讨论部分预应力混凝土的发展、突降、最小配筋率及预应力度等一些基本概念。在设计计算方面介绍规范中规定的名义拉应力法,同时对使用阶段的裂缝与挠度进行综合阐述与讨论。

4.1 部分预应力混凝土的发展与优越性

部分预应力混凝土是针对预应力混凝土在理论与实践存在的一些不足,于近十几年内发展起来的一门新兴学科。有些人片面理解为:当全预应力混凝土(指在荷载作用混凝土下翼缘拉应力等于零)在计算过程中预应力损失估计过小而实际发生过大引起在荷载作用下出现裂缝的结构称为部分预应力混凝土。这种理解是错误的。部分预应力混凝土是容许在设计荷载作用下开裂,但绝不是设计上失误,而是更经济更有效地设计预应力力筋及非预应力钢筋,所以部分预应力混凝土结构兼有全预应力混凝土与钢筋混凝土两种结构的双重优越性能,更能有效地控制使用条件下的裂缝、变形(短期与长期)及延性。破坏之前又具备较高的延伸率与能量吸收能力,故其发展前景颇乐观。

部分预应力是1939年奥地利工程师恩伯格(Emperger)首创的。他通过张拉几根预应力钢丝,另外还配置一些非预应力的高强钢丝来增加极限承载能力。英国学者阿比列斯(Abeles)与恩伯格(Emperger)相互配合对部分预应力进行一系列的试验研究,在1941~1942年发展了这种混合配筋的概念。其中一部分钢筋用作预应力力筋,而另一部分钢筋采用高强度钢丝(后来考虑造价贵,换成普通钢筋)以便提高极限状态下的承载能力。施加的预应力要比全预应力小一些。阿比列斯发展的这种理论曾被英国东部铁路总工程师局所接受。从1948年开始建成了跨径9~15m倒T型组合截面的梁桥,容许拉应力为3.85

N/mm^2 。这批小梁,经过应力幅度 $0 \sim 4.55 \text{ N/mm}^2$ 的反复循环荷载一百万次,没有可见的裂缝出现。后来阿比列斯将梁的容许拉应力提高到 4.55 N/mm^2 。

在预应力混凝土发展初期,人们一提到预应力混凝土就是指全预应力或超预应力而言,即在设计荷载作用下最不利截面上受拉区纤维应力应该等于零或保持一定的压应力。法国弗莱西奈(E. Freyssinet)就主张在混凝土截面保持 $0.08 R$ 的压应力, R 表示混凝土标号。预加力过大,材料与张拉设备都将耗资。截面上的配筋率就会增大,在超载作用下也会出现脆断,比较危险。再者,预加力大就容易在锚头附近发生难以消除的水平裂缝,水平裂缝要比竖直裂缝更危险。因为它的渗水面积大,更容易使预应力力筋腐蚀。在结构上,出现设计荷载满载布置是罕见的,因而部分预应力混凝土只要求在经常荷载作用下不出现裂缝就能满足结构的功能要求。经常荷载一般记为等于全部设计荷载 $40\% \sim 50\%$ 。只要在经常设计荷载满足强度及挠度裂缝要求就足够了。这样预应力力筋的用量减少。单靠预应力力筋还不能满足极限承载能力的要求,应适当增加一些非预应力钢筋,避免突然性破坏,而且增加结构的延性。

从图 4-1,可以看出,如果破坏荷载为 P_u , AB 曲线表示全预应力的荷载-挠度曲线,破坏时的挠度为 δ_1 。 CD 曲线表示有限预应力(指

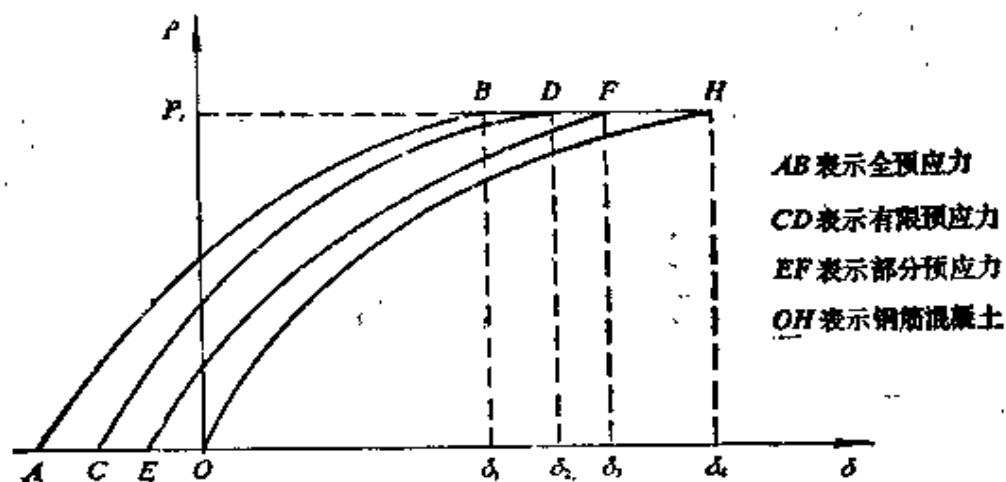


图 4-1 从全预应力到钢筋混凝土荷载与挠度曲线

设计荷载不许有裂缝,但许可有拉应力),当破坏时,其挠度只有 δ_2 。 EF 曲线表示部分预应力,其最终挠度达到 δ_3 。 $\delta_3 > \delta_2 > \delta_1$ 。 OGH 是普通钢筋混凝土受弯构件的 $P-\delta$ 曲线,破坏时最大挠度可达 δ_4 。很明显,用部分预应力代替全预应力不仅改善延性,有利于抗震,避免脆性破坏,还能节约钢材,节约劳动力。

如果我们的设计能使设计荷载作用下出现裂缝,而在经常荷载作用下没有裂缝,只允许在混凝土中有一定的拉应力,那么这样的设计既经济又适用。即使偶然出现超载,裂缝开展后,当超载过后,裂缝立即闭合,毫无痕迹,不会影响结构的安全与美观。全预应力的上拱度要比部分预应力要大。如屋面板采用部分预应力,因为其上拱度小,故找平层要比用全预应力屋面板小,这必然减轻自重。目前,在欧美各国一提到预应力都不言而喻指部分预应力。做全预应力的,只有特殊结构,像蓄水池,核容器等。凡是超载属于偶然情况,采用部分预应力更合理。目前预应力力筋(指钢丝、钢绞线)与普通钢筋已经拉开价格差距(约2:1),即使部分预应力需要加设非预应力钢筋,由于节约了预应力力筋,总的造价仍比全预应力便宜。

总之,部分预应力归纳有下列几个优点:

- (1) 节省锚具设备,节约高强钢材,对需要大批量生产的构件特别能收到经济效益。
- (2) 减少上拱度,降低二期恒载重量;
- (3) 即使发生裂缝,超载过后可以闭合,不影响结构的安全度。
- (4) 在结构中经常维持过大的预应力,并不安全,存在着隐患万一钢丝断裂,锚头将被像炮弹一样弹出而出人身事故。采用部分预应力可减少这种内在隐患。
- (5) 减少端部锚头下水平裂缝的产生。

4.2 混凝土结构物的分类

国际预应力混凝土协会(简称 F.I.P.)及欧洲混凝土委员会(简称 C.E.B.)在 1970 年第六届年会上建议将混凝土结构物分为 4 级,即。

I级——全预应力,在使用荷载的最不利组合时,不允许混凝土出现拉应力。

II级——有限预应力,在使用荷载的最不利组合下,允许有低于混凝土极限抗拉应力的拉应力,但是在工作阶段应该避免出现拉应力。

III级——部分预应力,对拉应力不受限制,但必须控制其裂缝开展宽度。

IV级——钢筋混凝土。

日本为了扩大钢筋混凝土的应用范围,在钢筋混凝土结构施加少量预应力,其目的主要是改善裂缝的开展,称之为“预应力-钢筋混凝土”。实际上,这是一种加固措施。日本在许多钢筋混凝土桥梁上均采用过这种加固措施。

有限预应力与部分预应力严格来说是有区别的。有限预应力与全预应力在工作阶段均没有裂缝出现,可以统称为全预应力,故在美国的设计规程中,不再沿用有限预应力这一术语。

表4-1是混凝土结构分类及其具体要求。第IV类是作者编入的,FIP-CEB并没有这类结构的分类。这类“预应力-钢筋混凝土”施加的预加力要比部分预应力混凝土小得多,仅是为改善裂缝而采取的措施。

混凝土结构的分类

表4-1

名 称	FIP-CEB 分类	预加力	拉 应 力		裂 缝	
			往常荷载	最大设计荷载	经常荷载	最大设计荷载
1. 全预应力混凝土	I	有	无	无	无	无
2. 有限预应力混凝土	II	有	无	有	无	无
3. 部分预应力混凝土	III	有	有	有	无	有
4. 钢筋混凝土	IV	无	有	有	有	有
5. 预应力-钢筋混凝土*		有	有	有	有	有

* FIP-CEB 没有这类结构,日本已用过很多。

4.3 部分预应力混凝土受弯构件的工作状态

部分预应力混凝土受弯构件的工作全过程,可用图 4-2 所示的 $M-\delta$ 曲线表示。构件从建立预应力(扣除损失后)到破坏可分三个阶段, I 是截面开裂前阶段(图 4-2, AB 线), II 是截面开裂后的裂缝开展阶段(图 4-2, BC 线)和受拉钢筋屈服后的破坏阶段 III(图 4-2, CD 线), III 阶段又包括 III-a 与 III-b 两个部分。很明显,部分预应力混凝土的抗裂弯矩写成如下表达式

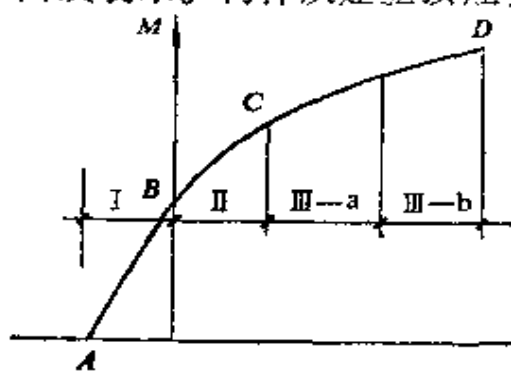


图 4-2 部分预应力构件 $M-\delta$ 图

$$M_{y,r} = M_0 + M_t \quad (4-1)$$

式中, M_0 ——截面退压弯矩;

M_t ——混凝土截面自身抗裂弯矩;

$M_{y,r}$ ——截面施加部分预应力后抗裂弯矩;

显然,由于构件建立的有效预应力 N_p 值不同,因而使混凝土下翼缘拉应力为零的退压弯矩也必然各异。因此在使用荷载 M 作用下,受拉区的混凝土的应力状态也有所不同。当 $M < M_0$ 时,受拉区钢筋重心水平处的混凝土处于受压(应力)状态。

当 $M = M_0$ 时受拉区钢筋重心水平处的混凝土的应力为零;当 $M_0 < M < M_{y,r}$ 时,受拉区钢筋重心水平处的混凝土处于拉应力状态;当 $M > M_{y,r}$ 时,受拉区混凝土产生裂缝,这时混凝土截面退出工作。在 I, II-a, II-b 阶段,混凝土全截面受压,在 III-a, III-b 阶段,混凝土开裂。

如果将受弯构件各阶段混凝土截面的应力、预应力筋应力及非预应力钢筋的应力用图表示,则示于图 4-3 中。具体数量大小如下表,表 4-2

表 4-1 中符号说明;

N_p ——有效预加力;

A ——混凝土截面面积;

部分预应力混凝土各部件在 I~II 受力阶段的应力

表 4-2

名称 \ 受力阶段	I	I-a	I-b	II-a	II-b
混凝土应力	$\sigma_h = \left(\frac{N_y}{A} + \frac{N_y e y_x}{I} \right)$	0	$-\gamma R_l$	0	0
预应力钢筋应力	$\sigma_y = -\frac{N_y}{A_y} + n_y \sigma'_h$	$-\frac{N_y}{A_y} + n_y \sigma''_h$	$-\left(\frac{N_y}{A_y} + \gamma R_l n_y \right)$	$-\left(\frac{N_y}{A_y} + \sigma_y \right)$	$-R_y$
非预应力钢筋应力	$\sigma_g = n_g \sigma'_h$	$n_g \sigma''_h$	$-\gamma R_l n_g$	$-\sigma_g$	$-R_g$

注: $n_y = \frac{E_y}{E_h}$, $n_g = \frac{E_g}{E_h}$, “+”代表压应力, “-”代表拉应力。

预应力力筋与非预应力钢筋作用在同一水平面上。

I ——混凝土截面对截面形心惯性矩;

e ——混凝土截面形心到预应力力筋重心的距离;

y_x ——混凝土截面形心到截面任一纤维的距离;

γ ——截面塑性系数, 见本章参考文献[1]第 18 页表 1-1;

R_l ——混凝土极限抗拉强度;

σ_y ——预应力力筋应力;

σ_g ——非预应力钢筋应力;

σ'_h ——I 阶段力筋水平面上混凝土压应力;

σ''_h ——II-a 阶段力筋水平面上混凝土压应力;

R_y ——II-b 阶段预应力力筋极限拉应力;

σ_y ——II-a 阶段预应力力筋增长的拉应力;

σ_g ——II-a 阶段非预应力钢筋应力;

R_g ——II-b 阶段非预应力钢极限拉应力;

E_y ——预应力力筋弹性模量;

E_h ——高标号混凝土弹性模量;

$$n_y = \frac{E_y}{E_h} \text{ 比值;}$$

$$n_g = \frac{E_g}{E_h} \text{ 比值;}$$

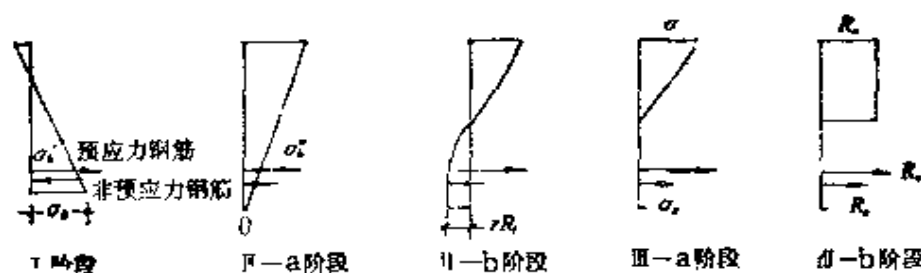


图4-3 部分预应力构件、混凝土、力筋及非预应力钢筋各阶段应力状态

4.4 预应力度 的定义及表达方式

部分预应力混凝土的预加力当比全预应力的情况有所降低之后, 为了保证极限承载能力的要求, 以及保证应变的Ⅱ截面假定, 必须增设非预应力钢筋(采用软钢)。由于增设非预应力钢筋 A_s , 故截面上的未知数除了中和轴位置 x 及预应力力筋用量 A_p , 又增加了 A_s 。然而平衡方程只有两个即 $\Sigma M = 0$ 和 $\Sigma H = 0$, 这里 M 表示弯矩, H 表截面上所有水平力。在寻求第三个方程式时, 可以用预加力与非预应力钢筋的力的比值表示, 也可用用预加力引起的的弯矩与非预应力钢筋引起的弯矩比值来表示。在此有必要介绍预应力度 的概念。

4.4.1 预应力比率(Partial Prestress ratio)及预应力指标(Partial Prestress index)

预应力比率的概念是美国密歇根大学教授内曼(A. E. Naaman)首先引入并用符号 λ_p 表示。它定义为在极限状态下, 当只有预应力筋时所提供的极限抵抗弯矩, 其与预应力力筋加上非预应力钢筋共同提供的极限弯矩的比值, 即

$$\lambda_p = \frac{[M_u]_p}{[M_u]_{p+s}} = \frac{A_p R_y \left(h_y - \frac{x}{2} \right)}{A_p R_y \left(h_y - \frac{x}{2} \right) + A_s R_s \left(h_s - \frac{x}{2} \right)} \quad (4-2)$$

式中, $[M_u]_p$ ——预应力力筋引起的极限弯矩,

$[M_u]_{p+s}$ ——预应力力筋和非预应力钢筋共同承受的极限弯矩,

A_p, A_s ——分别为预应力力筋及非预应力钢筋截面面积,

h_Y, h_g ——分别为预应力力筋和非预应力钢筋的形心到混凝土上翼缘的距离。

R_Y, R_g ——分别为预应力力筋和非预应力钢筋的极限拉应力；

x ——混凝土矩形应力分布块的高度。

当 $h_Y = h_g$ 时，则 (4-2) 式化为

$$\lambda_p = \frac{A_Y R_Y}{A_Y R_Y + A_g R_g} \quad (4-3)$$

如果预应力力筋与非预应力钢筋作用在同一水平面上时，预应力比率可以近似定义为：预应力力筋的极限拉力与截面上预应力力筋的极限拉力与非预应力钢筋极限拉力之和的比值。

高强度钢材没有显著的流限平台，瑞士蒂尔利曼 (Thürliman) 教授建议采用预应力指标， i_p 为：

$$i_p = \frac{A_Y \sigma_{0.2}}{A_Y \sigma_{0.2} + A_g \sigma_g} \quad (4-4)$$

式中， $\sigma_{0.2}$ ——预应力力筋残余变形为 0.2% 时的协定屈服强度。

σ_g ——非预应力钢筋的屈服强度。

i_p ——实际上是在钢材达到流限时预应力力与非预应力的力比值。

4.4.2 预应力度 (Degree of Prestress)

印度学者拉马斯瓦迈 (G.S. Ramaswamy) 在他的著作中提出预应力度 (D.P.) 的新概念，他认为 D.P. 应该定义为

$$D.P. = \frac{M_o}{M_s + M_o} \quad (4-5)$$

式中， M_s ——恒载引起的弯矩；

M_o ——活载引起的弯矩；

M_o ——退压弯矩。(有用减压弯矩或失压弯矩，都是一回事)

减压弯矩 M_o 是在有效预应力作用下使混凝土截面下翼缘应力退回到零的虚构外力矩。

$$M_o = N_Y \cdot e + N_Y K_t = N_Y \cdot e + \frac{N_Y \cdot I_h}{A_h \cdot y_b} \quad (4-6)$$

式中, N_Y ——有效预应力(初始预应力减去预应力全部损失);

e ——预应力力筋偏心距;

y_b ——混凝土截面形心到下翼缘距离;

A_h ——混凝土截面面积;

I_h ——混凝土截面的惯性矩。

$D.P.$ 也可用应力比值表示, 即

$$D.P. = \frac{\sigma_h}{\sigma} \quad (4-7)$$

(4-7) 式中, σ_h 称为有效预应力或称构件底部混凝土应力为零时, 上翼缘的压应力, σ 为设计荷载(恒 + 活包括冲击)压应力。如果用林同炎平衡荷载理论 $D.P. = \frac{U}{U_0}$, 这里, U 表示由于施加部分预应力引起向上等效荷载集度, U_0 为设计总荷载集度。

很明显, 无论 λ_p 和 i_p 都是属于力的比值。而 $D.P.$ 应该是力矩的比值, 至于 $D.P.$ 表示为应力或荷载的比值都属于近似表达方式。现在有些人对 λ_p , i_p , $D.P.$ 统之称为预应力度是不严格的, 也是不正确的。只有(4-5)式所示才是真正的预应力度。当 $D.P. = 1.0$ 时是全预应力 $D.P.$ 在 $0 \sim 1.0$ 之间都属于部分预应力, $D.P. = 0$ 属于钢筋混凝土结构范畴。有了预应力度度的概念, 帮助我们对部分预应力的内涵有明晰界限与物理意义。

4.5 突降现象及最小配筋率

突降现象或称承载能力突然下降的现象对无粘结的预应力结构或出现裂缝的部分预应力混凝土结构表现最为突出, 这是因为钢筋与混凝土变形不协调, 混凝土出现裂缝之后, 预应力力筋不能突增应力, 因此抵抗弯矩基本上是常量。对于无粘结力筋的突降现象, 在 70 年代美国伊利诺斯州立大学(University of Illinois)与澳大利亚墨尔本莫纳希大学(Monash University)均做过试验, 论证过这种突降现象很有可能引起连锁反应, 导致结构物的突然破坏。

矩形截面的预应力混凝土梁其荷载-挠度($P-\delta$)曲线如图 4-4 所示。

如果截面上不出现裂缝, 形心轴不上移, $P-\delta$ 曲线沿 OAB 的轨迹上升, 承载力不会降低。如果截面上出现裂缝, 长度为 c , 在 $P = P_r$ 时, 因为非预应力钢筋很

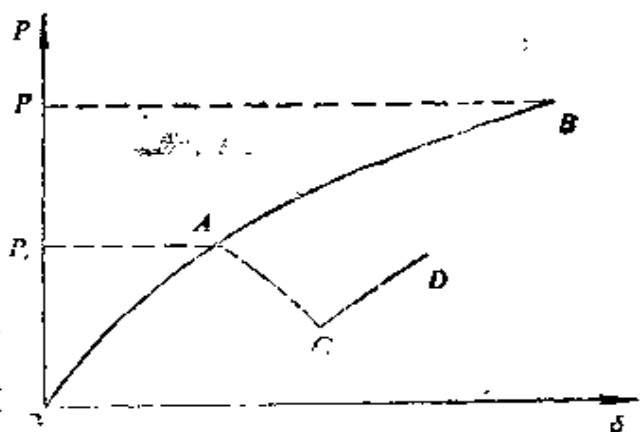


图 4-4 预应力结构 $P-\delta$ 曲线

少, 裂缝一旦出现, 承载能力从图 4-4 中 A 点突然下降。这种现象的出现令人关注。现取一矩形混凝土截面, 从理论上解释这个问题。

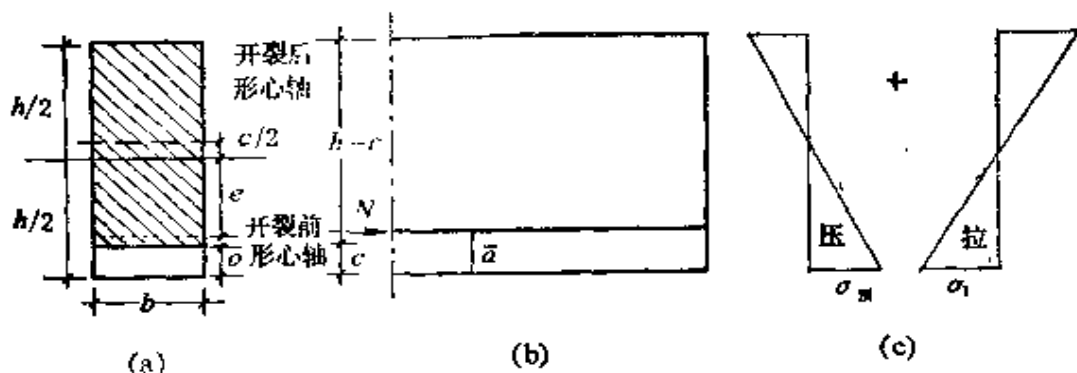


图 4-5 矩形截面预应力梁有长度为 c 的裂缝出现时的应力图示

当矩形截面开裂后, 预应力力筋的重心到开裂后截面的形心距离为 $e + \frac{c}{2}$, 其中 e 表示开裂前预应力力筋到未开裂截面的形心距离。开裂后截面模量为 $\frac{b(h-c)^2}{6}$ 。现计算 $\sigma_{\text{压}}$

$$\sigma_{\text{压}} = \frac{-N}{b(h-c)} - \frac{N\left(e + \frac{c}{2}\right)}{\frac{b(h-c)^2}{6}} = -\frac{N}{b} \left[\frac{1}{h-c} + \frac{e + \frac{c}{2}}{\frac{(h-c)^2}{6}} \right]$$

式中, N ——预加力;

b ——矩形截面宽度;

h ——矩形截面梁高;

$\sigma_{\text{预}}$ ——施加预加力后混凝土下翼缘压应力。

如果 M 表示恒载和活载弯矩之和, 则混凝土下翼缘拉应力

$$\sigma_1' = \frac{M}{b(h-c)^2} \cdot \frac{1}{6},$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \sigma_{\text{预}} + \sigma_1' &= -\frac{N}{b} \left[\frac{1}{h-c} + \frac{e + \frac{c}{2}}{(h-c)^2} \right] + \frac{M}{b(h-c)^2} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{b} \left[\frac{M - N \left(e + \frac{c}{2} \right)}{(h-c)^2} - \frac{N}{h-c} \right] \end{aligned} \quad (4-8)$$

令 $\sigma_{\text{预}} + \sigma_1' = \sigma_r$, 而 σ_r 表示弯曲时极限拉应力 ($\sigma_r \approx 1.5 R_s$), 则 (4-8) 式变为

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} \left[\frac{M - N \left(e + \frac{c}{2} \right)}{(h-c)^2} - \frac{N}{h-c} \right] &= \sigma_r \\ M &= \left[b\sigma_r + \frac{N}{h-c} \right] \cdot \frac{(h-c)^2}{6} + N \left(e + \frac{c}{2} \right) \end{aligned}$$

从上式, 对 M 求一次导, 则

$$\frac{dM}{dc} = -\frac{1}{3} [b(h-c)\sigma_r - N]$$

M 的斜率不出现负值的条件是 $\frac{dM}{dc} \geq 0$, 即

$$\frac{N}{bh} \geq \sigma_r \quad (4-9)$$

从 (4-9) 式可以看出, 保证 M 的升值条件应该满足 (4-9) 式的要求。突降现象所以会发生, 与以下三个条件有关: ①预加力不能太小; ②裂缝出现是突降的外因, 少配筋的部分预应力混凝土结构具备此可能性; ③力筋与混凝土的粘结程度, 有粘结时前两个条件不满足, 不一定出现突降, 无粘结时前两个条件不满足, 突降发生可能性仍旧存在。

对无粘结预应力混凝土，特别是无粘结部分预应力混凝土更要警惕突降现象的发生。

什么是部分预应力混凝土截面的最小配筋率？笔者认为就是开裂弯矩等于极限弯矩时的截面配筋率（ $\mu = \frac{A_Y}{bh_0}$ ）。从开裂弯矩 M_{yf} 到极限弯矩 M_u 应该有一段差距，如果 M_{yf} 与 M_u 很接近即将是危险的。参见图 4-6 所示。

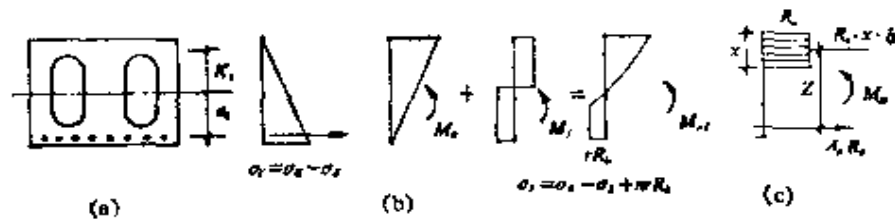


图 4-6 矩形空心板截面 M_{yf} 与 M_u 图式

$$M_u = A_Y R_Y \left(h_0 - \frac{x}{2} \right) \approx A_Y R_Y \cdot 0.9 h_0$$

$$M_{yf} = M_0 + M_f$$

式中， M_0 ——失压弯矩， $M_0 = A_Y \sigma_Y (e + K_t)$ ；

M_f ——混凝土截面自身抗裂弯矩。

σ_Y ——预应力；

K_t ——上核心距；

e ——预应力力筋偏心距。力筋的有效应力为：

$$\sigma_Y = \sigma_K - \sigma_S + n\gamma R_t$$

式中， σ_K ——控制应力；

σ_S ——预应力损失；

n ——钢筋弹性模量与混凝土弹性模量的比值；

R_t ——混凝土极限抗拉强度；

γ ——塑性系数；

$$\text{所以 } M_f = A_Y (e + K_t) (\sigma_K - \sigma_S + n\gamma R_t) + \gamma R_t W$$

W 为矩形截面的截面模量。

$$A_Y R_Y 0.9 h_0 = A_Y (e + K_t) (\sigma_K - \sigma_S + n\gamma R_t) + \gamma R_t W$$

从上式解出

$$\mu_{\min} = \frac{A_y}{bh_0} = \frac{\frac{\gamma R_l W}{0.9bh_0^3}}{R_y - (\sigma_k - \sigma_s + n\gamma R_l) \cdot \frac{(e + K_t)}{0.9h_0}}$$

现令

$$\beta = \frac{\gamma W}{bh_0^3}$$

$$\alpha = \frac{e + K_t}{h_0}$$

$$\sigma_u = \sigma_k - \sigma_s + n\gamma R_l$$

$$\text{则} \quad \mu_{\min} = \frac{\beta R_l}{R_y - \frac{0.9}{\alpha \sigma_u}} \quad (4-10)$$

R_y 为预应力筋极限抗拉强度。

$$\mu_{\text{实}} \geq K_f \cdot \mu_{\min} \quad (4-11)$$

这里 $K_f = 1.25$, K_f 不是抗裂安全系数而是一项安全储备系数。这里再次强调, 求最小配筋率时, 其判断条件是 $M_{y1} = M_{u1}$ 但是实际最小配筋率 $\mu_{\text{实}}$ 总要留有一定安全储备。因为在部分预应力中有非预应力钢筋存在能有效防止力筋脆断发生, 有一定安全储备防止突然断裂有关本节进一步讨论见本章参考文献 [2]。

4.6 名义拉应力法

混凝土承受荷载能力很差, 容易开裂。假定混凝土没有开裂, 仍按均质截面服从平截面假定算得假想拉应力, 这样的拉应力被称之为名义拉应力。名义拉应力与裂缝宽度紧密联系在一起。

用名义拉应力法进行部分预应力混凝土梁的设计, 就是把梁弯曲裂缝宽度近似地看作混凝土名义拉应力的单因数函数, 使构件的容许弯曲裂缝宽度与通过实验得到的综合性的混凝土容许名义拉应力相比较, 来建立容许弯曲裂缝宽度值与部分预应力的关系。

公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范(JTJ 023-85)给出容许的名义拉应力及构件高度的修正系数, 见表所列。

混凝土容许名义拉应力(MPa)

表 4-3

预加应力方式	裂缝宽度 mm	混 凝 土 标 号		
		30	40	≥50
灌浆后的 后张法	0.10	3.2	4.1	5.0
	0.15	3.5	4.6	5.6
	0.20	3.8	5.1	6.2
	0.25	4.1	5.6	6.7
先张法	0.10	—	4.6	5.5
	0.15	—	5.3	6.2
	0.20	—	6.0	6.9
	0.25	—	6.5	7.5

表 4-3 所列的容许名义拉应力尚应根据构件高度修正,见表 4-4

构件高度修正系数

表 4-4

构件高度 mm	≤200	≤400	500	800	≥1000
修正系数	1.1	1.0	0.9	0.8	0.7

如截面受拉区的混凝土中没有非预应力钢筋,修正后的容许名义拉应力还可以提高,其增值按非预应力钢筋截面面积(A_s)与混凝土截面面积(A_h)的百分比计算,每 1% 按表 4-3 中后张法构件容许值提高 4.0 MPa,先张法提高 3.0 MPa。但在任何情况下,提高后的容许名义拉应力不得超过混凝土设计标号的 $\frac{1}{4}$ 。

名义拉应力设计方程为:

$$\sigma_{wl} = \left(\frac{N_l}{A_h} + \frac{N_y e y_b}{I_h} \right) \leq [\sigma_{hl}] \quad (4-12)$$

式中, σ_{wl} ——恒载与活载(包括冲击)在最不利截面上下翼缘混凝土

$$\text{拉应力; } \sigma_{wl} = (M_s + M_d) \frac{y_b}{I_h} \quad (4-13)$$

N_Y ——有效预加力；

e ——预加力偏心距；

y_b ——截面形心到混凝土下翼缘距离；

A_h ——混凝土截面面积；

I_h ——混凝土截面形心的惯性矩；

$[\sigma_{hl}]$ ——混凝土容许名义拉应力。

从(4-12)式中解得：

$$N_Y \geq \frac{\sigma_{wl} - [\sigma_{hl}]}{\frac{1}{A_h} + \frac{ey_b}{I_h}} \quad (4-14)$$

N_Y 已知后，部分预应力力筋的用量面积为

$$A_Y = \frac{N_Y}{K_s \cdot \sigma_K} \quad (4-15)$$

式中， σ_K ——张拉预应力时的控制应力，一般取 $0.75 R_p^b$ ， R_p^b 为钢丝的标准极限强度；

K_s ——调整系数，一般取 0.7。

当 A_Y 已知后，非预应力钢筋面积 A_s 可从极限状态下总拉力 Z 中求得

$$Z = A_Y R_Y + A_s R_s \quad (4-16)$$

$$A_s = \frac{Z - A_Y R_Y}{R_s} \quad (4-17)$$

式中， Z ——极限状态部分预应力力筋及非预应力钢筋总拉力；

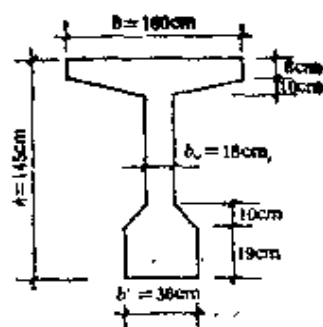
R_Y ， R_s ——分别为部分预应力力筋及非预应力钢筋的极限拉应力。

示例：

计算跨径 $l_p = 25$ m，梁高取 $\frac{l}{17}$ ，梁的尺寸如图 4-7 所示，其中 $h = 145$ cm， $b = 160$ cm， $b_w = 18$ cm， $b' = 36$ cm，平均翼板厚度

$$h_s = \frac{8 + 18}{2} = 13 \text{ cm}。$$

混凝土为 40 级, R_a 为极限轴向压应力 = 23.0 MPa, R_t 为混凝土抗拉极限强度 = 2.15 MPa, 张拉阶段取 $R'_a = 0.8 R_a = 18.4$ MPa, R'_t (强达达 80% 设计强度) = $0.8 \times 2.15 = 1.72$ MPa, 部分预应力力筋采用冷拔碳素钢丝 (符合国家标准 YB 256-64), $R_b^p = 1600$ MPa (标准极限强度), R_y 为抗拉设计强度对 $\phi 5$ 钢丝为 1280 MPa, 非预应力钢筋采用 I 级热轧螺纹钢筋 $R_s = 340$ MPa, 下面列出计算步骤:



(1) 混凝土截面几何特征:

$$A_h = 4888 \text{ cm}^2$$

$$I_h = 12,313,292 \text{ cm}^4$$

$$Y_b = 91.98 \text{ cm}$$

$$e = 82.18 \text{ cm}$$

非预应力钢筋含筋率不小于 0.75%。

(2) 采用容许裂缝宽度 $[\delta_{f\max}] = 0.1 \text{ mm}$

(3) 容许名义拉应力从表 4-3 中取 $[\sigma_{ht}] = 4.1 \text{ MPa}$ (暂不考虑构件高度的修正)

(4) 求部分预应力力筋面积 A_y

已知 $M_s + M_p = 2290.3 \text{ kN}\cdot\text{m}$, 恒载弯矩 $M_g = 1846.9 \text{ kN}\cdot\text{m}$, 活载加冲击引起的弯矩 = $943.4 \text{ kN}\cdot\text{m}$

$$\begin{aligned} \text{从(4-13)式 } \sigma_{wl} &= (M_s + M_p) \frac{y_b}{I_h} = \frac{2290.3 \times 10^5 \times 91.98}{12,313,292} \\ &= 171.1 \text{ kg/cm}^2 = 17.11 \text{ MPa} \end{aligned}$$

从(4-14)式

$$\begin{aligned} N_y &= \frac{\sigma_{wl} - [\sigma_{ht}]}{\frac{1}{A_h} + \frac{ey_b}{I_h}} = \frac{(171.1 - 41)}{\frac{1}{4888} + \frac{82.18 \times 91.98}{12313292}} \\ &= 158939 \text{ kg} \approx 1589.38 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\text{从(4-15) } A_y = \frac{N_y}{K_s \sigma_k} = \frac{158938}{0.7 \times 12000} = 18.9 \text{ cm}^2$$

(5) 求非预应力钢筋 A_s

在极限状态下, 极限弯矩力臂 $z = 117.5 \text{ cm}$

极限弯矩 $M_u = \gamma_g M_g + \gamma_p M_p$ 这里 γ_g, γ_p 为恒载、活载分项系数从公路钢筋混凝土及预应力混凝土桥涵设计规范(JTJ 023-85)取用, $\gamma_g = 1.2, \gamma_p = 1.4$ $M_u = 1.2 \times 1346.9 + 1.4 \times 943.4 = 2937.1 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$$\text{总拉力 } Z = \frac{M_u}{z} = \frac{2937.1 \times 100}{117.5} = 2499.7 \text{ kN}$$

从公式(4-17)中

$$A_s = \frac{249.97 \times 10^3 - 18.9 \times 12800}{3400} = 2.37 \text{ cm}^2$$

采用 $6\Phi 8$ 钢筋做为非预应力钢筋。总之

$A_y = 18.9 \text{ cm}^2, A_s = 2.37 \text{ cm}^2$ (部分预应力取 4 索 $24\Phi 5$)

4.7 部分预应力混凝土受弯构件挠度计算

这里, 将讨论四个问题: (1) 弯矩-挠度特点; (2) 未开裂构件的短期挠度计算方法; (3) 已开裂构件的短期挠度计算方法; (4) 国内外有代表性的计算公式。

4.7.1 $M-\delta$ 曲线特点

从图 4-8 中, 如果钢筋混凝土(用 R.C. 表示), 预应力混凝土(用

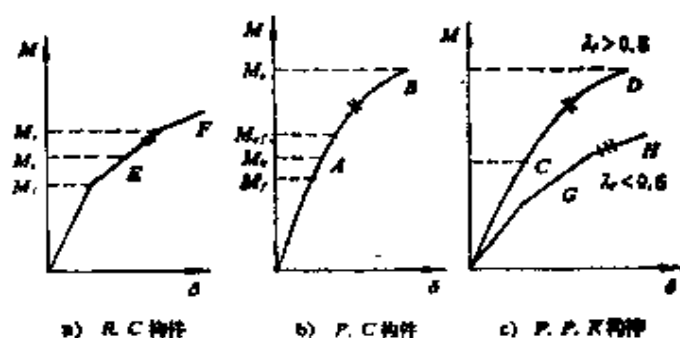


图 4-8 $M-\delta$ 关系曲线

λ_p 表示预应力比率; M 表示弯矩(最不利截面); δ 表示跨中挠度)

a) R.C. b) P.C. c) P.P.C.

P.C.表示), 部分预应力混凝土(用 P.P.R 表示), 其 $M-\delta$ 图形有差异。归纳下列几点:

(1) P.P.R. 的 $M-\delta$ 曲线在 R.C. 与 P.C. 之间。

(2) P.P.R. 在 $\lambda_p > 0.8$ 时, 基本上与 P.C. 相似, 即 CD 基本上与 AB 平行。

(3) 当 $\lambda_p \leq 0.5$ 时 P.P.R. 中的 GH (c 图) 与 R.C. (a 图) 的 EF 相互平行。

(4) P.P.R. 的 $M-\delta$ 曲线随着预加力的大小而变化, 在 $\lambda_p = 1.0$ 时它趋于 P.C. 的 $M-\delta$ 曲线。当 $\lambda_p = 0$ 时 P.P.R. 的 $M-\delta$ 曲线趋向于 R.C. 构件的 $M-\delta$ 曲线。随着 λ_p 的增加 P.P.C. 的 $M-\delta$ 曲线由折线转向圆滑曲线。而且 δ 值也变小。

4.7.2 未开裂构件短期挠度的计算方法

直接引用材料力学公式, 挠度 δ 的算式为

$$\delta = \alpha l^2 \frac{M}{B_0} \quad (4-18)$$

式中, α ——与荷载形式和计算截面位置有关的挠度系数, 可用曲率积分法、共轭梁法或图乘法求得;

l ——构件的计算跨径;

M ——最不利截面的弯矩(活载不计冲击系数)

B_0 ——未开裂截面的刚度。

对 B_0 的取值有下列两种建议:

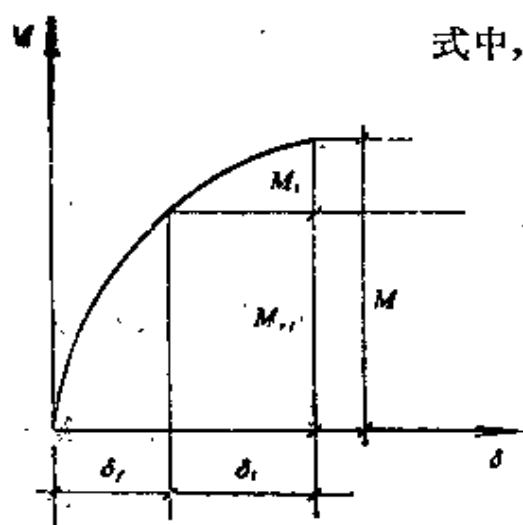
(1) 按 1975 年公路桥梁规范, $B_0 = \frac{1}{1.5} E_h I_h$, I_h 为混凝土全截面惯矩;

(2) 按 JTJ-023-85 规范, $B_0 = 0.85 E_h I_0$, I_0 换算截面惯矩。

4.7.3. 开裂构件挠度计算(短期荷载)

建议的方法是很多的, 各有其特点, 现介绍直接双线法。如图 4-9 所示。

$$\delta = \alpha l^2 \left[-\frac{M_{yt}}{E_h I_h} + \frac{4}{3} \frac{M - M_{yt}}{E_h I_c} \right] \leq \alpha l^2 \frac{M}{E_h I_0} \quad (4-19)$$



式中, δ ——短期挠度;

l ——跨径;

M ——弯矩;

M_{yr} ——开裂弯矩;

I_0 ——混凝土全截面惯矩;

I_c ——开裂截面惯矩;

I_e ——截面有效惯矩;(见第一章);

α ——挠度系数,见式(4-18)下的定义;

图4-9 部分预应力混凝土 M - δ 曲线 E_h ——混凝土弹性模量。

4.7.4 国内外代表性的计算公式

1. JTJ 02-85 当 $M > M_{yr}$ 时在 M_{yr} , 其刚度采用 $0.85 E_h I_0$ 。

而 $M - M_{yr}$ 作用时采用 $0.85 E_h I_{01}$, M_{yr} 为开裂弯矩。

这里, I_0 ——构件换算截面惯矩;

I_{01} ——截面开裂后的换算截面惯矩。

2. 部分预应力混凝土结构设计建议公式

构件刚度 B_0 可按下列公式计算

$$B_0 = \alpha_0 E_h I_0 \quad (4-20)$$

式中, α_0 ——构件截面的弹性刚度折减系数,

I_0 ——构件换算截面的惯矩。

对A类构件(不开裂构件)和 $M \leq M_{yr}$ 的B类构件

$$\alpha = 0.85$$

对B类(允许开裂的部分预应力混凝土构件)构件

$$\alpha = \frac{0.85 \beta M}{\beta M_{yr} + 0.85(M - M_{yr})} \quad (4-21)$$

式中, M ——使用荷载

M_{yr} ——截面开裂弯矩

$$\beta = \frac{0.1 + 2n_g \mu}{1 + 0.5 \gamma_1}$$

μ ——纵向受拉钢筋的配筋率, $\mu = \frac{A_s + A_{s'}}{bh_0}$

$$\gamma_1 = \frac{(b_s - b)h_s}{bh}$$

其中 b_s, h_s 分别为倒T形截面受拉区翼缘的宽度和高度(对工字形截面可取 $\gamma_1 = 0$)。

当预拉区出现裂缝的构件 B。尚应减少 10%。

对于使用荷载长期组合作用,其构件的挠度乘以长期增长系数 η , 其值可按式计算:

$$\eta = \frac{M_c \cdot \theta + (M - M_c)}{M} \quad (4-22)$$

式中, M_c ——使用荷载长期组合作用下的弯矩

θ ——挠度增长系数 θ 可取 2.0。

关于挠度计算可参阅本章参考文献[3]。

4.8 部分预应力混凝土的展望

自从 1954 年在英国伦敦召开第一届预应力混凝土年会上, (F.I. P.) 法国著名预应力创始人弗莱西奈与英国学者阿比列斯 Abeles 通过激烈的辩论弗莱西奈终于承认部分预应力的合理性与经济性。从此部分预应力混凝土在欧美各国的工程实践中迅速推广。进入 80 年代我国在上海、甘肃先后修建了三座部分预应力混凝土桥梁, 跨径 20~25 m。1985 年深圳市铁路高架桥, 也采用部分预应力, 预应力度 D.P. 取 0.75, 全桥四跨, 即 10.28 m + 12.56 m + 12.56 m + 10.28 m, 共四联。目前在我国的铁路桥梁中, 部分预应力在中小跨径的简支梁中已得到一些推广。在理论研究方面也有不少进展, 像 P.P.C. 的塑性行为, P.P.C. 的抗弯强度、疲劳, 部分预应力比率与 P.P.C. 连续梁的应力重分布、无粘结 P.P.C. 截面配筋设计原则、长跨铁路连续梁采用 P.P.C. 探讨等, 取得不少可喜成绩。部分预应力已经正式列入公路桥涵规范 (JTJ 023-85)。设计理论已趋成熟, 裂缝与疲劳的研究更加深入。工程师们所担心的裂缝开展与恢复问题也得到肯定答案。进一步

的工作将是提供整套设计标准图, 还要扫除思想上的障碍。像大量的高速公路建设中, 预应力空心板梁需要上万片, 如将全预应力改成部分预应力, 将大量节约投资, 节省原材料。作者认为无粘结部分预应力是发展方向, 不仅节约灌浆工序, 同时节约钢材。铁道部科学研究院在 P.P.O. 研究方向做了许多工作而且非常认真、细致, 成果可靠。可以断言, 部分预应力混凝土由于它的合理性, 经济性与适应性必然会得到应有的推广与发展。

本章参考文献

- [1] 丁大钧主编. 《钢筋混凝土构件抗裂度裂缝和刚度》. 南京工学院出版社, 1986 年第一版。
- [2] 张士铎. 南浦大桥引桥部分预应力 20 m 跨径空心板的研究. 《江苏交通工程》, 1993 年第 1 期。
- [3] 部分预应力混凝土委员会《部分预应力混凝土结构设计建议》编写组编. 《部分预应力混凝土结构设计建议》中国铁道出版社, 1985 年第 1 版。

第五章 混凝土徐变理论

本章介绍徐变理论,包括概述、多种徐变理论、徐变系数与收缩系数、徐变变形的计算、徐变曲线的特征及计算应力重分布的代换柱法,并给出示例。

5.1 概述

混凝土徐变理论是混凝土基础理论中最重要的内容之一。它牵涉结构的变形与失效,而且是时间 t 与龄期 τ 的复合变量。混凝土的徐变与收缩总是耦合而生。两者对结构的内力和截面上的应力产生双重影响,包括:

- (1) 构件在受压区的徐变与收缩将会增大它的挠度;
- (2) 混凝土的徐变对偏心受压的立柱将引起弯曲的增大,因此增加初始偏心距,势必降低立柱的承载力;
- (3) 在预应力或部分预应力混凝土构件中,收缩与徐变的发生将导致预应力损失,而这部分损失占据全部损失的 $\frac{1}{3}$ 以上。

(4) 构件如果是由两种材料组成,那么徐变的发生将使组合截面产生应力重分布。

(5) 对于超静定结构,混凝土的徐变将使截面上的内力发生重新分配,即徐变将引起结构中的次内力。

因此,徐变的大小与发生规律和引起结构的后果是我们重点研究的课题之一。

5.2 几种徐变理论

首先,我们从定性方面认识一些徐变特征,它们有:

(1) 截面配筋高, 将降低徐变引起的预应力损失。当 T 形截面的配筋率由 0.5% 增加到 5% 时, 由于混凝土徐变所引起的力筋应力损失可以减少 66.6%~80%。

(2) 空气中, 湿度低, 则徐变大。湿度大, 则徐变小。温度上升, 徐变随之加大。当温度降至零度, 则徐变停止。

(3) 对受拉构件与受压构件, 徐变的影响是相同的。

(4) 龄期增加, 混凝土徐变变小。徐变变形约为弹性变形的 1~3 倍。

(5) 当混凝土的应力不超过极限强度之半时, 徐变变形与时间 t 的关系呈直线变化规律。

(6) 徐变的大小还取决于混凝土灌筑与养护的质量, 徐变还与结构尺寸、截面外形有一定关系。

(7) 如果混凝土的应力超过混凝土标号的 0.8 倍, 徐变与时间 t 的关系进入非线性范畴。张拉时混凝土截面应力超过 $0.8R$ 后, 混凝土由于徐变变形随时间 t 骤增将导致结构的破坏。

(8) 徐变变形与 t 的关系大体上呈指数规律, 1 个月内徐变完成全部的 40%, 3 个月后完成 60%。1 年到 1 年半完成 80%。3~5 年后基本上完成 100%。6 年后徐变变形已经微不足道, 可以忽略不计。

至于, 徐变理论, 目前发展 7~8 种之多, 现分述如下:

(1) 老化理论

当加载时混凝土龄期增加, 徐变的终值将会减小。在不同的龄期中施加相同的应力, 则在各徐变曲线上相应于同一龄期的各点将具有相同的切线倾角, 如图 5-1 所示。这个理论称之为老化理论, 特别适用于早期加载情况。如果 $\varphi(t, \tau)$ 表示在 t 时间, τ 龄期的徐变应变 (ϵ_s) 与弹性应变 (ϵ_e) 的比值, 现以 $\varphi(t, \tau)$ 为纵坐标, t 表示横坐标, 则可以绘出一组曲线, 示于图 5-1 中。

德国迪辛格 F. Dichinger 曾对老化理论提出一个简明的表达式,

$$\varphi_t = \varphi_\infty (1 - e^{-\beta t}) \quad (5-1)$$

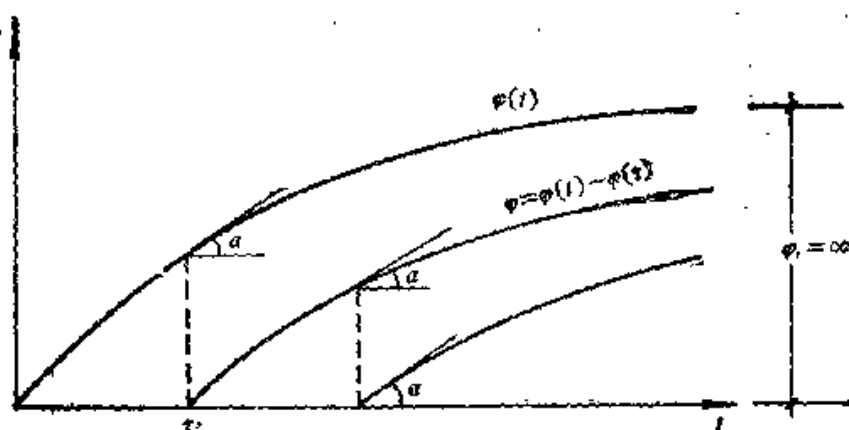


图 5-1 老化理论中, $\varphi-t$ 关系曲线

式中, φ_t ——徐变系数, 即在某一应力状态下, 徐变应变与弹性应变的比值;

φ_∞ ——徐变系数的终值;

β ——与截面特征有关的参数;

t ——时间(以年计)。

如果考虑不同龄期影响, 则徐变系数可写成 $\varphi(t, \tau)$ 。

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_\infty(1 - e^{-\beta t}) - \varphi_\infty(1 - e^{-\beta \tau}) = \varphi_\infty(e^{-\beta \tau} - e^{-\beta t})$$

当加载龄期为 τ , 同时 t 比 τ 大得多时, 上式变为:

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_\infty(e^{-\beta \tau}) \quad (5-2)$$

老化理论又称徐变率法(R.C.法), 是美国格兰维尔(W.H. Glanville)于1930年创始的, 后来美国人惠特尼(G.W. Whitney)在1982年发表了它的数学模式, 1937年德国迪率格将之用于结构计算中去。老化理论对很多简单问题可以获得解析解。当混凝土应力减小而且应力变化幅度不大时, 该理论得到满意的结果。该理论认为混凝土的徐变随龄期的增大减小很快, 老的混凝土徐变为零, 这与实际情况不符合。另外该法在应力递增时, 低估了徐变变形。当应力递增时又高估了徐变变形, 把可以恢复的徐变变形缩小为零。因为该法忽略了卸载后的徐变恢复, 也不能反映早期加载时徐变迅速发展特点。

(2) 先天理论

先天理论认为无论混凝土龄期多少徐变的增长规律均相同, 它并非取决于结构加载的龄期, 而且徐变系数的终值是个常量。在加载龄期 φ 曲线上, 当确定加载龄期 τ_0 的混凝土徐变曲线, 可以通过它的水平平移得到不同加载龄期 $\tau_1, \tau_2 \dots$ 的混凝土徐变曲线, 如图 5-2 所示。

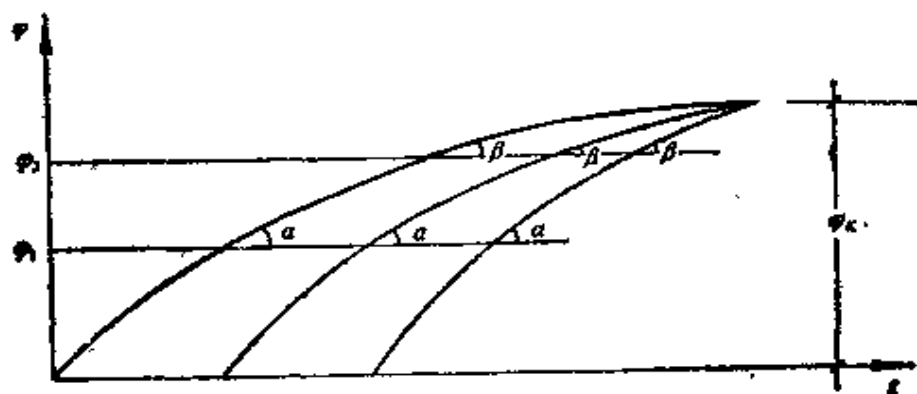


图 5-2 先天理论 $\varphi-t$ 曲线

其变化规律为

$$\varphi = \varphi(t - \tau)$$

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_k (1 - e^{-\alpha(t-\tau)}) \quad (5-3)$$

(5-3) 中符号表示, 如 (5-1) 式。先天理论是符合于结构后期加载的徐变规律, 钢结构的徐变特性符合先天理论。

(3) 弹徐体理论 (也称混合理论)

弹徐体理论又称叠加法, 是由前苏联教授马斯洛夫 (Г. Н. Маслов) 和阿鲁久涅杨 (Н. Х. Аругюнян) 创立的。该理论也是以应变与应力之间呈线性关系的假定为基础的。应力变化时的徐变总变形可按相应应力增量引起的徐变变形总和计算, 即所谓叠加原理。

$$\varepsilon(t) = \sigma(\tau_0) \left[\frac{1}{E(\tau_0)} + c(t, \tau_0) \right] + \sum_{i=1}^n \Delta \sigma(\tau_i) \left[\frac{1}{E(\tau_i)} + c(t, \tau_i) \right]$$

式中, $\varepsilon(t)$ ——在时间 t 时总应变 (指弹性应变与徐变应变);

$\sigma(\tau_0)$ ——龄期为 τ_0 时混凝土应力;

$E(\tau_0)$ ——龄期为 τ_0 时的弹性模量;

$\frac{1}{E(\tau_0)}$ ——单位应力下的弹性应变,

$c(t, \tau_0)$ ——龄期为 τ_0 , 时间为 t 时在单位应力作用下的徐变应变(或称徐变率);

$\Delta\sigma(\tau_i)$ ——在龄期为 τ_i 时的应力增量。

式中的 $\frac{1}{E(\tau_0)} + c(t, \tau_0)$ 为单位应力作用下的弹性应变与徐变应变之和; $\sigma(\tau_0) \cdot \left[\frac{1}{E(\tau_0)} + c(t, \tau_0) \right]$ 为 $\sigma(\tau_0)$ 的应力下弹性应变与徐变应变之和。

当应力连续变化时, 总应变为

$$e(t) = \sigma(\tau_0) \left[\frac{1}{E(\tau_0)} + c(t, \tau_0) \right] + \int_{\tau_0}^t \left[\frac{1}{E(\tau)} + c(t, \tau) \right] d\sigma(\tau)$$

如果将 $e(t)$ 除以 e_s (弹性应变), 则此式就是图 5-3 中一系列的曲线, 每一个 τ 值表示一条曲线。

叠加法的计算值与试验结果基本相符合, 故该法在工程计算中得到广泛的应用。但是弹徐体理论又认为卸载后徐变恢复曲线与加载徐变曲线相同。因而得出老混凝土的徐变是完全可以恢复的结论, 这与试验结果不符合。

徐变系数是指在某种应力状态下徐变应变与弹性应变之比通常用 φ 表示, 它是一个与时间和加载龄期有关的复杂函数。

$$\varphi = \varphi(t, \tau)$$

根据阿鲁久涅杨建议:

$$\varphi(t, \tau) = \left(A + \frac{B}{\tau} \right) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}] \quad (5-4)$$

式中, A, B, τ ——三个待定参数;

γ ——与截面特征有关参数。

(4) 有效模量法(简 F.M. 法)

属于近似计算方法。该理论将徐变纳入弹性变形的一部分增量,

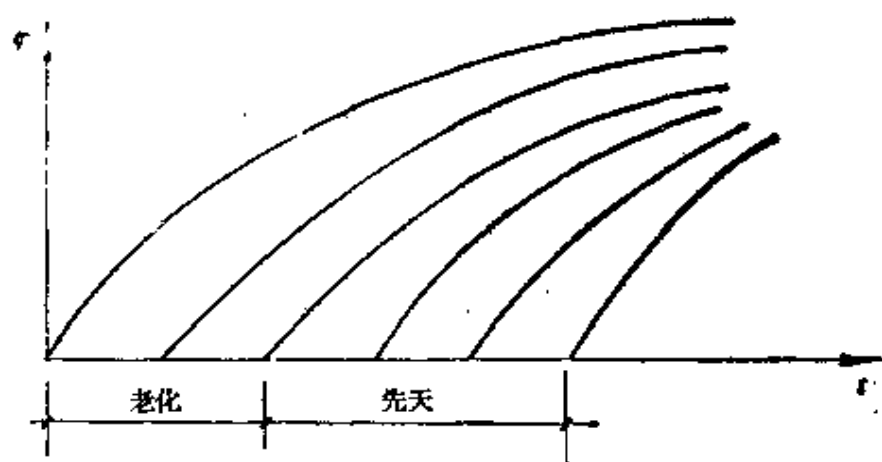


图 5-3 混合理论 $\varphi-t$ 曲线

即将徐变问题化成相当的弹性变形去处理。当荷载不变时，假设应力与总应变成正比，则有

$$E_e(\tau) = \frac{\sigma(\tau)}{\sigma(\tau)c(t, \tau) + \frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)}} = \frac{E(\tau)}{1 + c(t, \tau)E(\tau)} \\ = \frac{E(\tau)}{1 + \varphi(t, \tau)} \quad (5-5)$$

式中， $E_e(\tau)$ ——考虑徐变后，当加载龄期为 τ 时的弹性模量；

$\sigma(\tau)$ ——当加载龄期为 τ 时的应力；

$c(t, \tau)$ ——当加载龄期为 τ ，时间为 t 时单位应力下的徐变应变；

$\frac{\sigma(\tau)}{E(\tau)}$ ——为加载龄期为 τ 时的弹性应变。它反映单位应力作用下，与老化理论不同。

如果 ε_c 为徐变应变， ε_e 为弹性应变，则徐变率 $c(t, \tau)$ 为：

$$c(t, \tau) = \frac{\varepsilon_c}{\sigma(\tau)}, \quad (5-6)$$

如将 $\sigma(\tau) = E(\tau) \cdot \varepsilon_e$ 代入上式，则有

$$c(t, \tau) \cdot E(\tau) = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_e} = \varphi(t, \tau)$$

这实际上是对 (5-5) 式的证明。

有效模量法是德国人菲伯 (O.Faber) 根据他的试验结果于 1927 年提出的。此法是用弹性模量的降低来考虑徐变的影响。即用 $E_e(\tau)$ 进行弹性分析。在龄期为 τ 的徐变应变决定于当时的应力值, 而不去考虑应力的历史记录。有效模量法有以下两种情况与试验结果较为符合: (1) 应力保持常量; (2) 混凝土龄期可以忽略不计。但该法在应力递增时高估了变形, 在应力递减时低估了变形, 还低估了在常变形下的应力松弛。即计算应力高于实际应力。而在卸载时, 变形全部得到恢复也不符合实际情况, 故适应性不佳。

(5) 弹性老化理论

弹性老化理论也称流动率法(简称 R.F. 法), 它克服了老化理论中不足之处, 低估了混凝土的徐变和徐变恢复。英国英格兰特 (G.L England) 和伊尔斯顿 (J.M. Illston) 建议将徐变函数由三个部分组成: (1) 瞬时弹性应变 ϵ_{ei} (有人称之为瞬时徐变), (2) 迟后弹性应变 ϵ_e (有人称为滞后徐变), (3) 可变应变和流动应变 ϵ_f (有人称之为老化徐变), 参见图 5-4

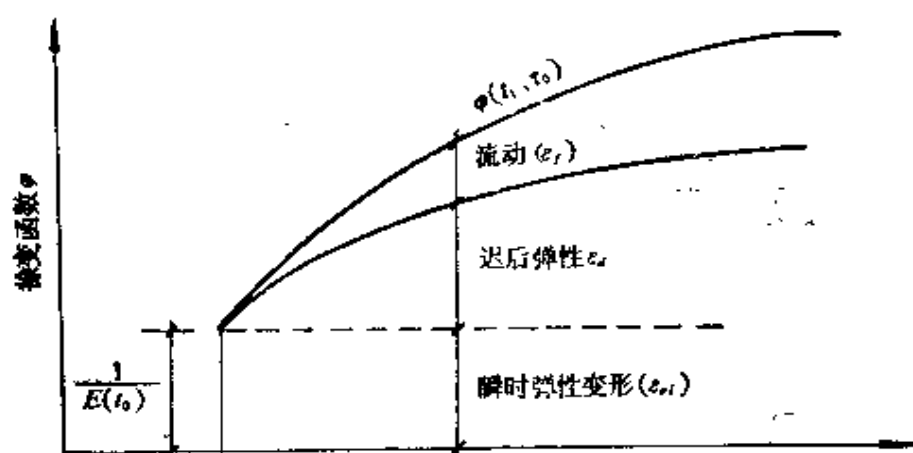


图 5-4 弹性老化理论中, 徐变函数与时间 t 关系曲线

英格兰特和伊尔斯顿的试验结果表明, 弹性应变 ϵ_e 与加载龄期毫无关系, 且达到最终值时要比流变 ϵ_f 快。流变 ϵ_f 是不可恢复的应变成分。假定不同加载龄期流动应变曲线是平行的, 也就是不同加载龄期在任意时间的流动速率是相同的, 因此称之为流动率法。

流动率法与老化理论相比有明显改进。它能够较好地描述早龄期混凝土在卸载状态下徐变变形的可恢复性。它把不可恢复的徐变变形归结为材料的老化,并假定各龄期不可恢复的流变曲线相互平行,因此对老混凝土规律的描述不能使人满意。一般低估了老混凝土的徐变。当应力递增时,该方法同样低估了徐变,但在应力递减过程中,效果良好。

(6) 继效流动理论

继效流动理论也是将徐变分成可恢复和不可恢复两种。而流变速率不再假定与加载龄期无关。徐变曲线和弹性后效曲线由试验得出,该法也能得到较好结果。但是计算步骤太繁琐。

(7) 龄期调整有效模量法

由德国人特洛斯(H. Tröst)于1967年建立的,后来由美国人巴森(Z. P. Bazant)加以改进。它是用老化系数来考虑混凝土老化对徐变最终值的影响,忽视了材料的老化,因此高估了第一次加载后应力增量引起的徐变。

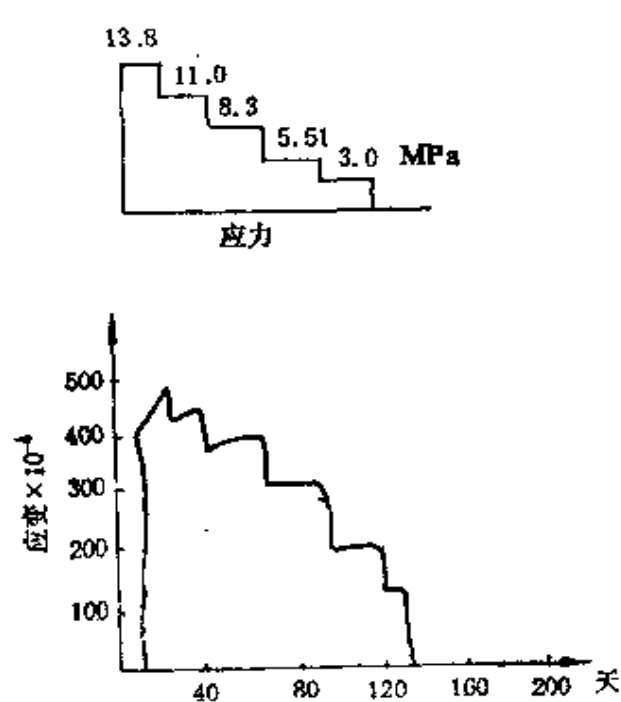


图 5-5 徐变应力递减曲线

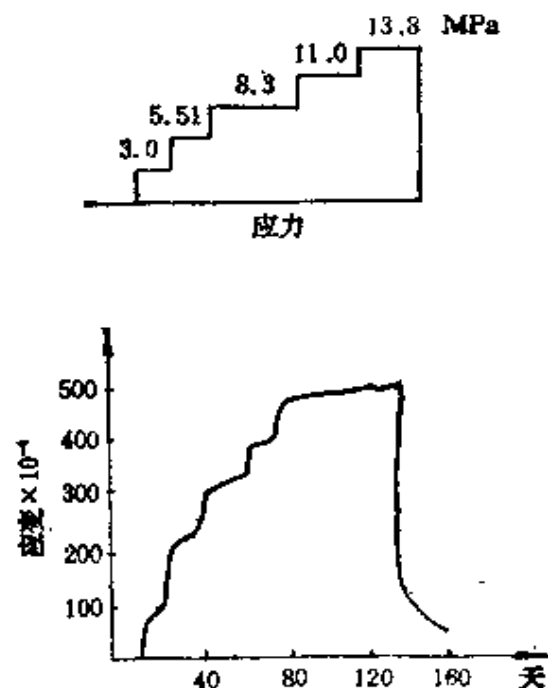


图 5-6 徐变应力递增曲线

图 5-5 及图 5-6 分别表示徐变率法、弹徐体理论、有效模量法中徐变应力的计算值与实测值(用应变 $\times 10^{-6}$ 表示)的对比。图 5-5 为徐变应力递减曲线,图 5-6 为徐变应力递增曲线。

5.3 徐变系数与收缩系数

上述七种徐变理论都要牵涉徐变系数,即 $\varphi(t, \tau)$ 。徐变系数与时间 t 以及龄期 τ 的关系综合描述就形成各种理论的来源。混凝土的徐变是一个相当复杂的过程,它的徐变变形及其随时间的增长速度取决于很多因素。诸如混凝土的强度、水灰比、骨料的大小及其质量与特性、周围环境条件包括温度与湿度等。混凝土收缩系数 ε_{sr} ,也是与时间和其他因数有关。混凝土徐变和收缩问题的研究方兴未艾。国际权威性的学会和知名学者所提出的徐变、收缩的数学模型尚存在显著分歧和不确定性,不仅繁简迥异,而且基本出发点也有所不同。

5.3.1 徐变系数($\varphi(t, \tau)$)

这里,徐变系数应定义为在某一应力下龄期为 τ , 时间为 t 的徐变应变(或变形)与弹性应变(或变形)的比值。当 $t = \infty$ 时即 $\varphi(\infty, \tau) = \varphi_K$ 称为徐变系数的终值。归结两个问题:①是如何确定 φ_K ; ②是 $\varphi(t, \tau)$ 的表达式。

例如在英国标准规范中 BS 5400 φ_K 是多种系数的连乘,

$$\varphi_K = k_1 \cdot k_m \cdot k_s \cdot k_e \cdot k_f \quad (5-7)$$

式中, k_1 ——与构件有关的有效厚度的参数;

k_m ——与混凝土加载龄期的固结程度有关的参数;

k_s ——与混凝土的成分有关的参数;

k_e ——与混凝土浇筑环境的有关参数;

k_f ——取决于混凝土徐变发展情况的参数。

以上这些参数均可用图表表示以便查阅后进行连乘,得到徐变终值 φ_K 。

美国混凝土学会(ACI),对 φ_K 及 $\varphi(t, \tau)$ 分别建议为两个公式,即

$$\varphi_K = 2.35 k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 k_4 k_5 k_6 \quad (5-8)$$

$$\varphi(t, \tau) = \frac{(t - \tau)^{0.6}}{10 + (t - \tau)^{0.6}} \cdot \varphi_k \quad (5-9)$$

式中, k_1 ——环境湿度修正系数;
 k_2 ——加载龄期修正系数;
 k_3 ——混凝土坍落度修正系数;
 k_4 ——结构尺寸修正系数;
 k_5 ——混凝土含砂率修正系数;
 k_6 ——混凝土含气量修正系数;
 t ——时间;
 τ ——混凝土龄期以年计。

在国际上, 欧洲混凝土学会与国际预应力混凝土协会的标准规范中将徐变系数表示为若干分量之和, 这种模式被许多国家接受。

$$\varphi(t, \tau) = \beta_s(\tau) + 0.4\beta_d(t - \tau) + \varphi_f[\beta_f(t) - \beta_f(\tau)] \quad (5-10)$$

式中, $\beta_s(\tau) = 0.8 \left[1 - \frac{R_\tau}{R_\infty} \right];$

R_τ ——混凝土龄期为 τ 时混凝土的标号;

R_∞ ——混凝土在时间为 ∞ 大时标号;

$\beta_d(t - \tau)$ ——随时间而增长滞后弹性应变, 其中 t 为所要求的徐变系数的时间, τ 为加载龄期, $\beta_d(t - \tau)$ 可从图 5-7 中查取。

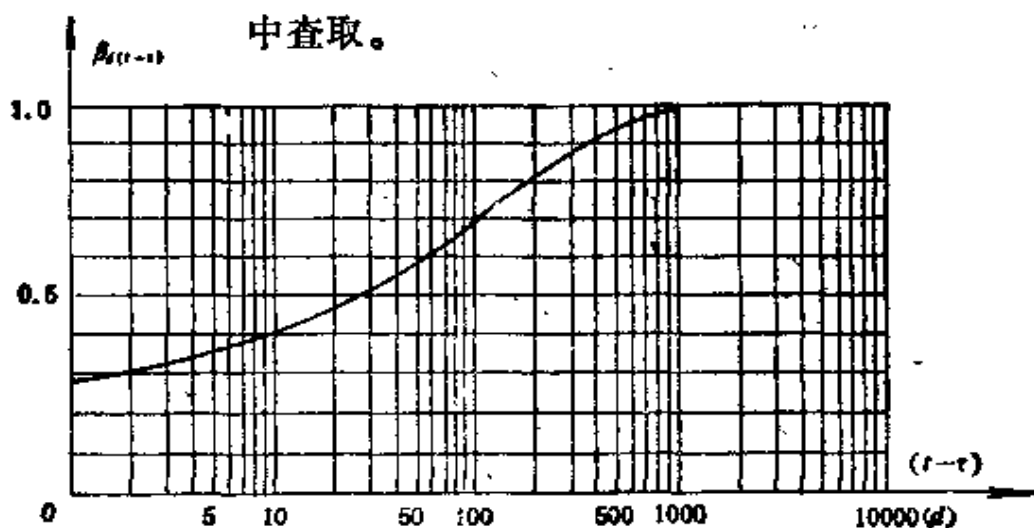


图 5-7 随时间而增加的滞后弹性应变

$\frac{R(\tau)}{R_{\infty}}$ ——混凝土龄期为 τ 时的强度 $R(\tau)$ 与最终强度 R_{∞} 之比, 可从图 5-8 中查取;

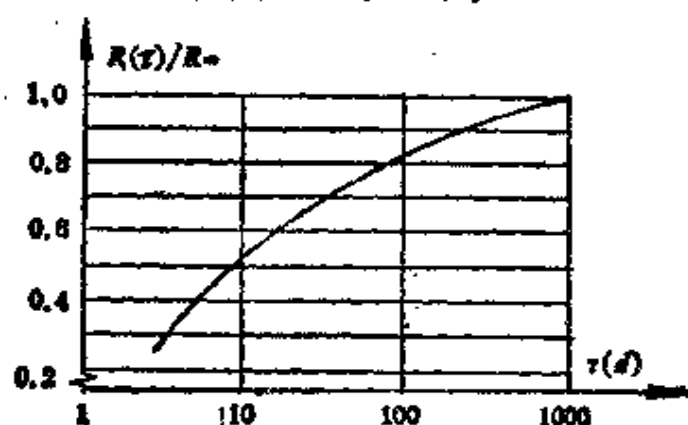


图 5-8 混凝土龄期与强度

φ_f ——流塑系数, $\varphi_f = \varphi_{f1} \cdot \varphi_{f2}$ (5-11)

φ_{f1} ——依周围环境而定的系数, 见表 5-1。

φ_{f1} 及 λ 系数

表 5-1

环境条件	相对湿度	系 数	
		φ_{f1}	λ
水 中		0.8	80
很潮湿的大气	90%	1.0	5
野外一般条件	70%	2.0	1.5
很干燥的大气	40%	3.0	1.0

φ_{f2} ——依理论厚度 h 而定的系数可从图 5-9 中查得。 h 应按下式计算

$$h = \lambda \cdot \frac{2A_n}{u} \quad (5-12)$$

λ ——依周围环境而定, 参见表 5-1;

A_n ——构件混凝土截面面积;

u ——与大气接触的截面周边长度;

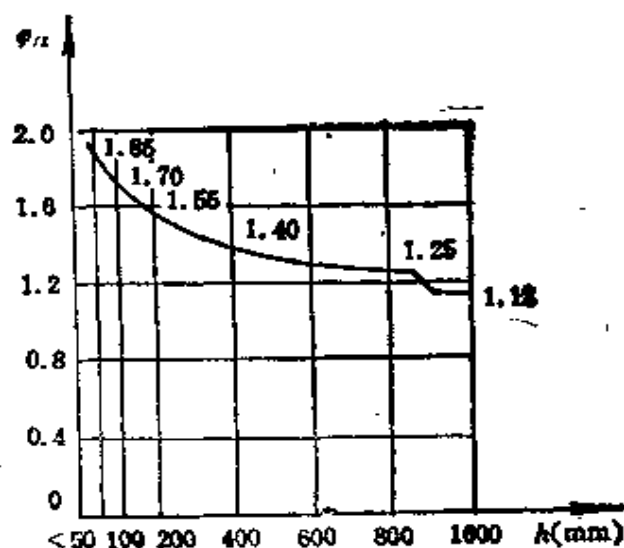


图 5-9 理论厚度对徐变影响系数

$\beta_f(t), \beta_f(\tau)$ ——随混凝土龄期而增长的滞后塑性应变，它们与理论厚度 h 有关，可从图 5-10 中查取；

t, τ ——所要求的徐变系数的混凝土时间和混凝土加载龄期。

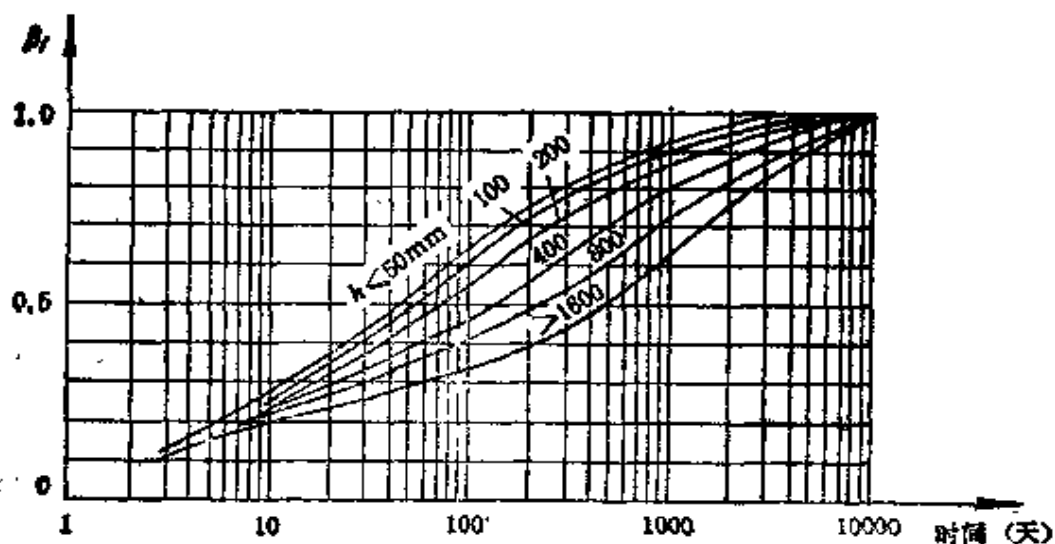


图 5-10 随混凝土龄期而增长的滞后塑性应变

如果要求不十分精确时，徐变系数的终值也可以从表 5-2 中查取，但该表只适用于硅酸盐水泥，其他水泥不适用。

徐变系数终值 φ_K

表 5-2

大气条件		相对湿度75%		相对湿度55%	
构件理论厚度 受荷时混凝土龄期(天)		$\frac{2A_h}{u}$ (cm)		$\frac{2A_h}{u}$ (cm)	
		≤ 20	≥ 60	≤ 20	≥ 60
φ_K ($\varphi_{t-\infty, \tau}$)	3~6	2.7	2.1	3.8	2.9
	7~60	2.2	1.9	3.0	2.5
	>60	1.4	1.7	1.7	2.0

注：中间值可以内插。

5.3.2 收缩系数(ε_{st})

欧洲混凝土学会与国际预应力混凝土协会 (CEB-FIP) 对收缩系数的终值建议采用如下公式计算：

$$\varepsilon_{st} = K_a \cdot K_b \cdot K_c \cdot K_d \cdot K_t$$

式中， ε_{st} ——收缩系数终值；

K_a ——取决于环境条件的参数；

K_b ——取决于混凝土硬化程度系数；

K_c ——取决于混凝土理论厚度的参数；

K_d ——截面含筋率；

K_t ——时间参数。

混凝土龄期为 τ ，时间为 t 时的收缩系数为

$$\varepsilon_{st}(t, \tau) = \varepsilon_{st} [\beta_s(t) - \beta_s(\tau)] \quad (5-13)$$

式中， $\beta_s(t)$ ， $\beta_s(\tau)$ 分别表示混凝土收缩的时间函数与龄期函数。

对硅酸盐水泥配制的中等稠度的普通混凝土，其 ε_{st} 可由表 5-3 中得到，这个表的精度是不高的，祇能为工程人员参考。

如果想知道 $\varepsilon_{st}(t, \tau)$ 可从 (5-13) 式得到，先从表 5-11 中查 t 得 $\beta(t)$ 再从表 5-11 中查 τ 天得 $\beta(\tau)$ 两者相减。再乘 ε_{st} 即得 $\varepsilon_{st}(t, \tau)$ (值)。如果 τ 为 28 天龄期，则

收缩应变终值 ε_{st}

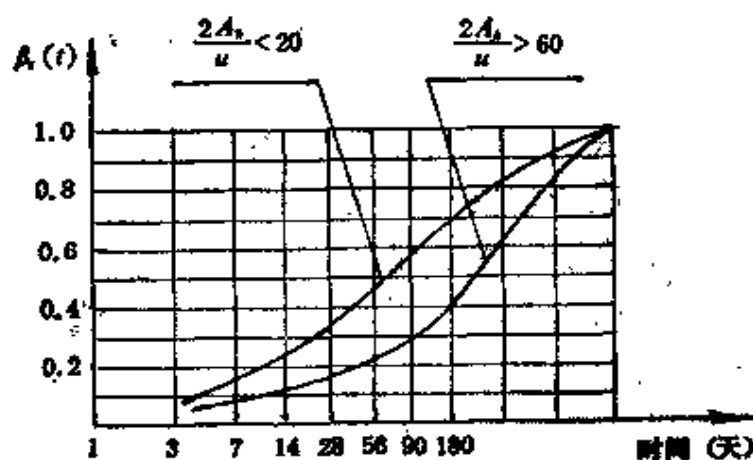
表 5-3

大气条件		相对湿度75%		相对湿度55%	
构件理论厚度 受荷时混凝土龄期(天)		$\frac{2A_h}{u}$ (cm)		$\frac{2A_h}{u}$ (cm)	
		≤ 20	≥ 60	≤ 20	≥ 60
$\varepsilon_{st} \cdot 10^{-3}$	3~6	0.26	0.21	0.43	0.31
	6~60	0.23	0.21	0.32	0.30
	>60	0.16	0.20	0.16	0.28

注: 表中数值可以内插。

$$\varepsilon_{st}(t, 28) = \varepsilon_{st}(\beta_s(t) - 0.32);$$

$\beta_s(t)$ 从图 5-11 中查取, $\beta_s(t)$ 是小于 1.0 的系数, $t = \infty$ $\beta_s(t)$ 趋近于 1.0, 同时与 $\frac{2A_h}{u}$ 有关

图 5-11 $\beta_s(t)$ 曲线

5.4 混凝土徐变应变与变形的计算

首先, 有三个基本假定要遵循, 1) 不考虑构件的配筋率; 2) 混凝土弹性模量 E_s 是常量; 3) 结构在线弹性范围工作。

5.4.1 应力不变的条件下结构的徐变应变与变形

混凝土加载龄期为 τ , 这时混凝土的应力为 σ_s , 但在以后的时间

内应力保持不变, 即 σ_r 为常数。

在时间 t 内总应变可以写成如下表达式:

$$\varepsilon(t, \tau) = \varepsilon_e(t, \tau) + \varepsilon_c(t, \tau) \quad (5-14)$$

式中, $\varepsilon_e(t, \tau)$ 为弹性应变, 当 σ_r 不变时, $\varepsilon_e(t, \tau) = \frac{\sigma_r}{E_h}$;

$\varepsilon_c(t, \tau)$ 是混凝土徐变应变, 当 σ_r 不变时, $\varepsilon_c(t, \tau) = \varphi(t, \tau) \varepsilon_e(t, \tau)$,

$$\therefore \varepsilon_c(t, \tau) = \varphi(t, \tau) \cdot \frac{\sigma_r}{E_h}$$

因此, 总应变为

$$\varepsilon(t, \tau) = \frac{\sigma_r}{E_h} [1 + \varphi(t, \tau)] \quad (5-15)$$

在结构计算中, 如只考虑弯矩作用, 以单位虚荷载作用在 K 点所引起的结构内任意一点虚应变计算式代入积分即得:

$$\Delta_{KP} = \int_L \frac{M_P(x) \bar{M}_K(x)}{EI(x)} dx + \int \frac{M_P(x) \bar{M}_K(x)}{EI(x)} dx \cdot \varphi(t, \tau) \quad (5-16)$$

在(5-16)式中, $M_P(x)$ 为外荷载 P 作用下引起的结构的弯矩;

$\bar{M}_K(x)$ 为单位力作用在 K 点上引起结构的内弯矩;

故有 $\Delta_{KP} = \delta_{KP} + \delta_{KP}^* = \delta_{KP} + \delta_{KP} \cdot \varphi(t, \tau) \quad (5-17)$

(5-17) 式中 δ_{KP} 为结构的弹性变形, 后一项 $\delta_{KP} \varphi(t, \tau)$ 是徐变变形。利用悬臂施工法建造连续梁时, 既要考虑施工阶段各种外荷载条件, 又要考虑各梁段逐节施工时混凝土加载龄期的差异, 必须分段计算得出总变形, 故有

$$\Delta_{KP} = \sum_i \delta_{iP} \cdot [1 + \varphi(t, \tau)] \quad (5-18)$$

5.4.2 应力变化条件下结构的徐变应变

在加载龄期 τ 的瞬间, 混凝土的弹性应变为

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_h}$$

在 t 时间内混凝土弹性变形 $\frac{\sigma_t}{E_h}$

在 dt 时间内混凝土的弹性变形的增量 $\frac{d\sigma_t}{E_h}$

在 dt 时间内混凝土徐变应变的增量:

$$\left(\frac{\sigma_t}{E_h} + \frac{d\sigma_t}{E_h}\right) d\varphi_t = \frac{\sigma_t}{E_h} d\varphi_t + \frac{d\sigma_t}{E_h} \cdot d\varphi_t$$

如果保持高阶微量, 则在 dt 时间内的应变增量为

$$d\varepsilon_t = \frac{d\sigma_t}{E_h} + \frac{\sigma_t}{E_h} d\varphi_t + \frac{d\sigma_t d\varphi_t}{E_h}$$

上式等号两边进行积分, 则有:

$$\int_{\tau}^t d\varepsilon_t = \int_{\tau}^t \frac{d\sigma_t}{E_h} + \int_{\tau}^t \frac{\sigma_t}{E_h} d\varphi_t + \int_{\tau}^t \frac{d\sigma_t}{E_h} d\varphi_t$$

$$\varepsilon_t - \varepsilon_{\tau} = \frac{\sigma_t}{E_h} - \frac{\sigma_{\tau}}{E_h} + \frac{1}{E_h} \left[\int_{\tau}^t \sigma_t d\varphi_t + \int_{\tau}^t d\sigma_t \frac{d\varphi_t}{d_t} \right]$$

$$\varepsilon_t - \frac{\sigma_{\tau}}{E_h} = \frac{\sigma_t}{E_h} - \frac{\sigma_{\tau}}{E_h} + \frac{1}{E_h} \left[\int_{\tau}^t \sigma_t \frac{d\varphi_t}{dt} \cdot dt + \int_{\tau}^t d\sigma_t \cdot \frac{d\varphi_t}{dt} \cdot dt \right]$$

当 $\int_{\tau}^t d\sigma_t \cdot \frac{d\varphi_t}{dt} \cdot dt$ 被忽略不计时, 则有

$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_h} + \frac{1}{E_h} \int_{\tau}^t \sigma_t \frac{d\varphi_t}{dt} \cdot dt \quad (5-19)$$

有了(5-19)式, 可以解决应力随时间变化下的徐变变形。德国人特劳斯特(Tröst)等人提出的“松弛系数法”和“换算弹性模量法”也可以将(5-19)式通过中值积分得出近似解。

5.5 代换棱柱法

预应力混凝土的收缩与徐变的发生将影响截面上混凝土与钢筋的应力重分布。“代换棱柱法”就是解决这个问题的一种实用方法。

代换棱柱法的基本假定是:

(1) 平截面假定仍然适用;

- (2) 对于任一截面可用两个指定的棱柱体代替;
 (3) 棱柱体的位置, 就是截面上作用一轴力使其上下边缘应力为零时, 轴力的两个作用点。

应用代换棱柱法使混凝土塑性变形的结构内力计算大为简化。

现取一个对称于竖轴具有预应力力筋与非预应力钢筋的截面。截面上混凝土的形心位于点 S_b , 而所有钢筋的形心则位于 S_s 。如果截面上有不同弹性模量的钢筋, 则应按弹性模量之比换算成一种弹性模量的钢筋。

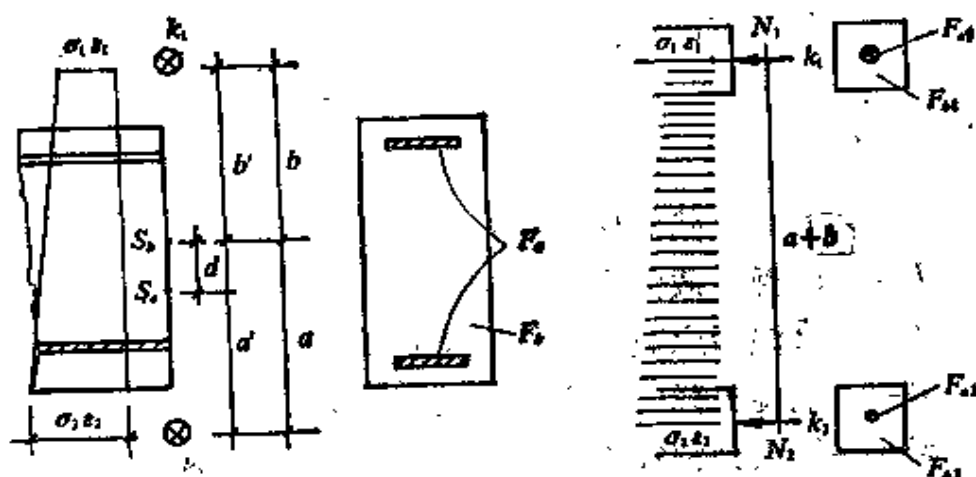


图 5-12 代换棱柱法、棱柱位置面积及钢筋面积

在对称截面的竖轴上总能找到两个点, 其中任一点施加一轴力时, 另一点上的应力等于零。

首先考虑截面的混凝土部分。设 k_1, k_2 两点分别距离混凝土截面形心 S_b 为 b 与 a , 如果 N 是纵向力, 则

$$\frac{N}{F_b} - \frac{N \cdot a \cdot b}{I_b} = 0$$

如果 N 为单位力, 则

$$\frac{1}{F_b} - \frac{1 \times a \times b}{I_b} = 0$$

$$\therefore a \cdot b = \frac{I_b}{F_b} = r_b^2 \quad (5-20)$$

同理,对钢筋的形心,则有

$$a'b' = \frac{I_o}{F_o} = r_o^2 \quad (5-21)$$

k_1, k_2 两点基本上应该满足截面中的已知条件,即必须满足(5-20)及(5-21)两式以及以下两个几何关系。

$$\left. \begin{aligned} a + b &= a' + b' \quad (a) \\ a - a' &= d \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (5-22)$$

a, b, a', b' 四个未知数,通过(5-20), (5-21), (5-22a), (5-22b)四个方程解得

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{2d} [(d^2 - r_b^2 + r_a^2) \mp \sqrt{(d^2 - r_b^2 + r_a^2)^2 + 4d^2 r_b^2}] \\ b &= \frac{r_b^2}{a} \end{aligned} \right\} \quad (5-23)$$

式中, a ——混凝土截面形心到 k_2 点距离;
 b ——混凝土截面形心到 k_1 点距离;
 ab —— r_b^2 混凝土截面的回转半径平方;
 d ——混凝土截面形心到钢筋截面形心的距离;
 a' —— k_2 点到钢筋形心的距离;
 b' —— k_1 点到钢筋形心的距离;
 $a'b'$ —— r_o^2 钢筋截面的回转半径平方。

在计算 a 值的公式中, S_o 点位于 S_c 之上时,根号前用正号,反之用负号。当 S_o 与 S_c 重合时,则 k_1 点在混凝土截面形心而另一点 k_2 则处于无穷远处,这说明配筋不合理,不能予以计算。

如果在混凝土截面的形心上作用着 M 与 N 两个外力,则可由在 k_1, k_2 点两个力 N_1 与 N_2 代替。从 $\Sigma M_{k_1} = 0$ 及 $\Sigma M_{k_2} = 0$ 解出:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \frac{Na + M}{a + b} \\ N_2 &= \frac{Nb - M}{a + b} \end{aligned} \right\} \quad (5-24)$$

现在将截面的混凝土部分用两棱柱代替,其形心与 k_1, k_2 相吻合。

N_1, N_2 两个力在这些点上所产生的变形与应力, 等于该截面在这些点上的变形与应力。 N_1 与 N_2 中任何一力对另一力的作用点上不产生变形与应力。

棱柱体的面积 F_{b1} 与 F_{b2} 尚不知道, 可通过下列公式求得,

$$\frac{N_1}{F_b} + \frac{N_1 b^2}{I_b} = \frac{N_1}{F_{b1}}$$

$$\frac{N_2}{F_b} + \frac{N_2 a^2}{I_b} = \frac{N_2}{F_{b2}}$$

或者写成,
$$\frac{1}{F_b} + \frac{b^2}{F_b r_b^2} = \frac{1}{F_{b1}}$$

$$\frac{1}{F_b} + \frac{a^2}{F_b r_b^2} = \frac{1}{F_{b2}}$$

考虑到 $ab = r_b^2$, 故解得

$$\left. \begin{aligned} F_{b1} &= \frac{a}{a+b} F_b \\ F_{b2} &= \frac{b}{a+b} F_b \end{aligned} \right\} \quad (5-25)$$

在(5-25)式中混凝土截面面积 F_b 已知后, 两个棱柱体的面积, 即可确定。

对于棱柱体约定钢筋的面积 F_{s1} 与 F_{s2} , 可按上述同理确定, 即

$$\left. \begin{aligned} F_{s1} &= \frac{a'}{a+b} F_s \\ F_{s2} &= \frac{b'}{a+b} F_s \end{aligned} \right\} \quad (5-26)$$

因此, 具有任何配筋的任意混凝土截面可由 F_{b1} 与 F_{b2} 两个约定棱柱体面积代换。两个棱柱体面积中心配有 F_{s1} 与 F_{s2} 的代换钢筋, 作用力为 N_1 与 N_2 。作用点分别在 k_1 与 k_2 位置上。

这些棱柱体的混凝土与钢筋的变形及其应力将等于所给截面在 k_1 点与 k_2 点的变形与应力。在 k_1 点与 k_2 点的应力及变形值并用直线连接。这样全截面上的应力及变形均能得到。 k_1, k_2 点既可在截面之内, 也可在截面之外。计算应符合上述基本假定。

示例 1:

钢筋与截面尺寸如图 5-13 所示。上面与下面一排钢筋都是预应力钢筋,其弹性模量 $E_y = 1.8 \times 10^5 \text{ MPa}$ 。下面第二排为非预应力钢筋 $E_s = 2.1 \times 10^5 \text{ MPa}$, 混凝土弹性模量 $E_h = 3 \times 10^4 \text{ MPa}$, 截面面积 $F_b = 1740 \text{ cm}^2$, $I_b = 1990000 \text{ cm}^4$ 换算成预应力钢筋 $F_{s1} = 25 + 10 + 25 \times \frac{2.1 \times 10^5}{1.8 \times 10^5} = 64.2 \text{ cm}^2$ 。现在求 $k_1 k_2$ 位置以及 F_{s1} , F_{s2} 及 F_{s1} , F_{s2} 。

换算钢筋的形心 S_s 位于距截面下边缘 23.6 cm 处。混凝土形心与钢筋形心的距离 $d = 23.8 \text{ cm}$ 。

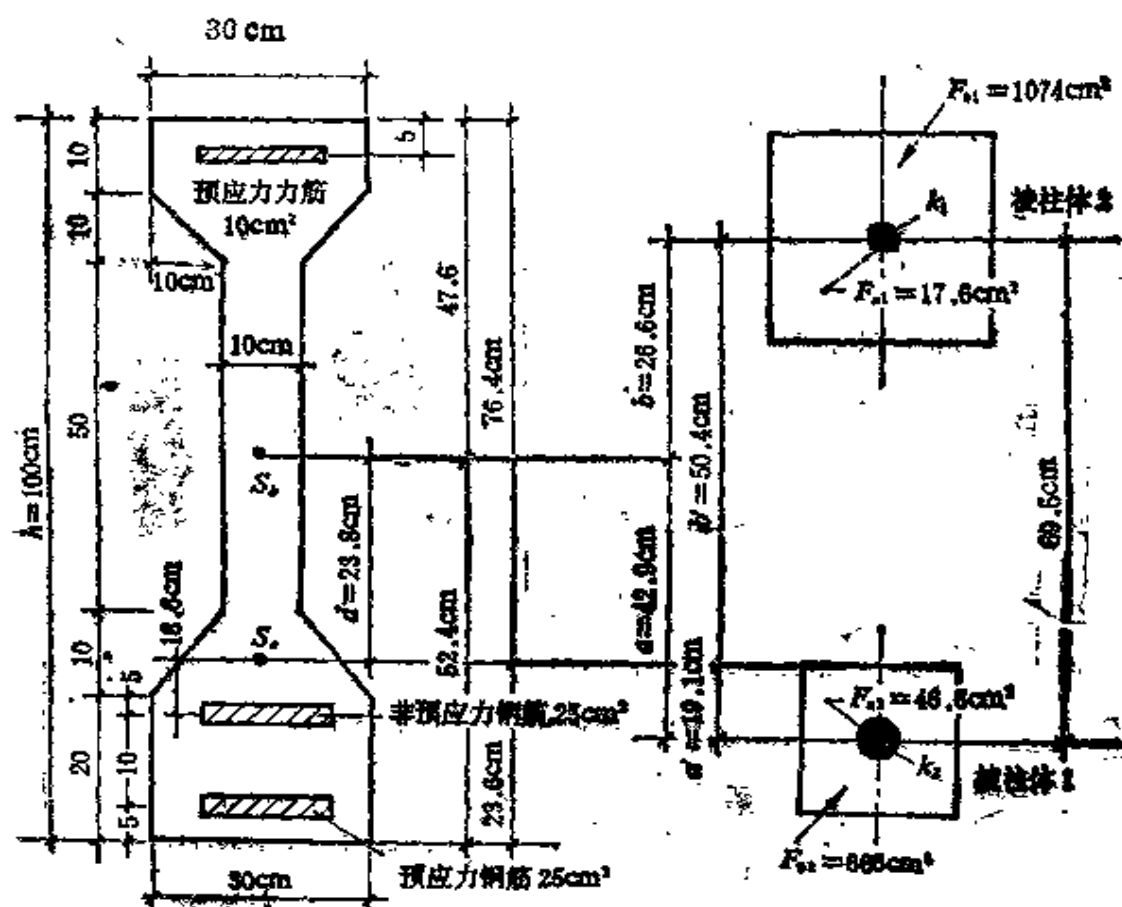


图 5-13 示例中截面尺寸及配筋

换算钢筋对形心的惯矩等于

$$I_o = 10 \times 71.4^2 + 25 \times 18.6^2 + \left(25 \times \frac{2.1 \times 10^5}{1.8 \times 10^5} \right)$$

$$\times 8.6^2 = 61790 \text{ cm}^4$$

$$r_b^2 = \frac{1990000}{1740} = 1140 \text{ cm}^2$$

$$r_a^2 = \frac{61790}{64.2} = 96.2 \text{ cm}^2$$

$$e = \frac{1}{2 \times 23.8} [23.8^2 - 1140 + 960$$

$$+ \sqrt{(23.8^2 - 1140 + 962)^2 + 4 \times 23.8^2 \times 1140} = 42.9 \text{ cm}$$

$$b = \frac{1140}{42.9} = 26.6 \text{ cm}$$

$$a' = a - d = 19.1 \text{ cm}$$

$$b' = a + b - a' = 50.4 \text{ cm}$$

在 k_1 点 $F_{s1} = \frac{42.9}{69.5} \times 1740 = 1074 \text{ cm}^2$

$$F_{s1} = \frac{19.1}{69.5} \times 64.2 = 17.6 \text{ cm}^2$$

在 k_2 点 $F_{s2} = \frac{26.6}{69.5} \times 1740 = 666 \text{ cm}^2$

$$F_{s2} = \frac{50.4}{69.5} \times 64.2 = 46.6 \text{ cm}^2$$

下面介绍利用代换棱柱法计算徐变引起的截面应力。

如果 M 与 N 是由于外荷载在截面内所产生的内力。 N_{OB} , N_{OH} 是随时间变化的钢筋内力, 则在约定点上, 这些代换力为

从图 5-14 中, 取 N_2 点为力矩中心, 则有

$$N_1 = \frac{Na + N_{OB}(a + c_b) + N_{OH}(a - c_h) + M}{a + b}$$

同理, 取 N_1 点为力矩中心, 则有

$$N_2 = \frac{Nb + N_{OB}(b - c_b) + N_{OH}(b + c_h) - M}{a + b}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{1 + \frac{E_h}{E_a} \frac{F_{b1}}{F_{a1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n\mu_1}}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{1 + \frac{E_h}{E_a} \frac{F_{b2}}{F_{a2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n\mu_2}}$$

这里 β_1, β_2 为与截面特征与弹性模量有关的参数;

式中, $\mu_1 = \mu \left(1 - \frac{d}{a}\right)$ 为第一个约定棱柱体的配筋率;

$\mu_2 = \mu \left(1 + \frac{d}{b}\right)$ 为第二个约定棱柱体的配筋率;

$\mu = \text{配筋率} = \frac{F_a}{F_b}$;

$F_a = F_y + \frac{E_a}{E_y} F_o$, F_a 是截面内钢筋的换算面积;

F_y, F_o, E_y, E_a 分别为预应力力筋、非预应力钢筋面积, 以及预应力力筋弹性模量及非预应力钢筋弹性模量;

a, b 是截面中混凝土部分的形心到约定点 k_1, k_2 (或 N, N_2) 的距离;

a', b' 是截面中钢筋部分的形心到约定点 k_1, k_2 (或 N, N_2) 的距离。

$K_1 K_2$ 系数请查表 5-4。

约定棱柱体混凝土应力的变化, 可由下式表示

$$\sigma_{\pi b} = \sigma_{b\pi 1} + \frac{\sigma_{b\pi 2} - \sigma_{b\pi 1}}{a + b} (b - y)$$

约定棱柱体钢筋应力的变化, 由下式表示

$$\sigma_{\pi a} = \sigma_{a\pi 1} + \frac{\sigma_{a\pi 2} - \sigma_{a\pi 1}}{a + b} (b - y)$$

上式中: $\sigma_{a\pi 1}, \sigma_{b\pi 2}$ 为约定点 N_1, N_2 处混凝土应力, y 从截面形心 (指混凝土) 到任一点距离, $\sigma_{a\pi 1}, \sigma_{a\pi 2}$ 为约定点 N, N_2 处钢筋应力;

$\sigma_{\pi b}$ 为 y 处混凝土应力;

σ_{x0} 为 y 处钢筋应力。

这里, 正号表示压应力, 负号表示拉应力

$K_1 K_2$ 值

表 5-4

$n = \frac{E_s}{E_h}$	φ_K	μ_1 或 μ_2								
		0.001	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.08	1.0
6	1.0	0	0.06	0.10	0.14	0.18	0.21	0.23	0.27	0.32
	1.5	0.01	0.08	0.15	0.20	0.25	0.29	0.33	0.39	0.43
	2.0	0.01	0.11	0.19	0.26	0.32	0.37	0.41	0.48	0.53
	2.5	0.02	0.13	0.24	0.32	0.38	0.44	0.48	0.55	0.61
	3.0	0.02	0.16	0.27	0.37	0.44	0.50	0.55	0.62	0.67
8	1.0	0.01	0.07	0.13	0.17	0.21	0.25	0.27	0.32	0.36
	1.5	0.01	0.10	0.19	0.25	0.30	0.35	0.39	0.44	0.51
	2.0	0.02	0.14	0.24	0.32	0.39	0.44	0.48	0.54	0.59
	2.5	0.02	0.17	0.29	0.38	0.46	0.51	0.55	0.62	0.67
	3.0	0.02	0.20	0.34	0.44	0.52	0.58	0.62	0.69	0.74

示例 2:

如示例 1 中, 已知 $a = 42.9 \text{ cm}$ $b = 26.6 \text{ cm}$ $d = 23.8 \text{ cm}$ 现在作用外力 $N = 2100000 \text{ N}$, $M = 34200000 \text{ N} \cdot \text{m}$

(1) 计算代换棱柱形心处混凝土及钢筋应力,

在 N_1 处(见图 5-10 所示)及 N_2 处混凝土应力

$$\sigma_{b01} = \frac{2100000}{1740} - \frac{3420000 \times 26.6}{1990000} = 7.5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{b02} = \frac{2100000}{1740} + \frac{3420000 \times 42.9}{1990000} = 19.5 \text{ MPa}$$

$$\mu_1 = \frac{64.2}{1740} \left(1 - \frac{d}{a}\right) = 0.016$$

$$\mu_2 = \frac{64.2}{1740} \left(1 + \frac{d}{b}\right) = 0.07$$

如果 $\frac{E_a}{E_h} = 6$, φ_K 取 3 查表 5-4 插入后得到

$$K_1 = 0.23, K_2 = 0.59$$

在 N_1 及 N_2 钢筋应力为

$$\sigma_{\pi a1} = \frac{7.5}{0.016} \times 0.23 = 107.8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\pi a2} = \frac{19.5}{0.07} \times 0.59 = 164.4 \text{ MPa}$$

由于混凝土徐变变形在代换棱柱体形心水平处混凝土应力为

$$\sigma_{bx1} = -7.5 \times 0.23 = -1.73 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{bx2} = -19.5 \times 0.59 = -11.51 \text{ MPa}$$

根据代换棱柱而算得混凝土徐变后下部预应力筋的应力为

$$\sigma_{\pi a} = 107.8 + \frac{164.4 - 107.8}{42.9 + 26.6} (26.6 + 42.4) = 164 \text{ MPa}$$

上部预应力钢筋应力为

$$\sigma_{\pi a} = 107.8 + \frac{164.4 - 107.8}{42.9 + 26.6} (26.6 - 47.6) = 90.7 \text{ MPa}$$

混凝土下边缘水平处混凝土应力

$$\sigma_{bx} = -1.73 + \frac{-11.51 + 1.73}{42.9 + 26.6} (26.6 + 47.4) = -12.1 \text{ MPa}$$

混凝土上边缘水平处混凝土应力

$$\sigma_{bx} = -1.73 + \frac{-11.51 + 1.73}{42.9 + 26.6} (26.6 - 52.6) = 1.9 \text{ MPa}$$

$$\frac{E_q}{E_y} = \frac{2 \times 10^5}{1.3 \times 10^5} = 1.17, \text{ 非预应力钢筋应力}$$

$$\sigma_{\pi a0} = 1.17 \left[107.8 + \frac{164.4 - 107.8}{42.9 + 26.6} (26.4 + 32.4) \right] = 182.4 \text{ MPa}$$

混凝土上边缘应力未徐变前为 3.7 MPa, 徐变后为 1.9, 下边缘应

力未徐变前 22.1 MPa 变为 -12.1 MPa。可见徐变后对边缘应力影响很大。

5.6 徐变研究的新动向

近年来徐变理论已有十几种之多，这类研究已趋饱和。混凝土的徐变是一种复杂的物理化学过程，虽然已经进行过大量研究，但这种过程的实质至今还没有弄清楚。徐变曲线正如图 5-15 所示，但各国学者想通过曲线，得出最优拟合，从而提出徐变函数的理想的数学表达式。

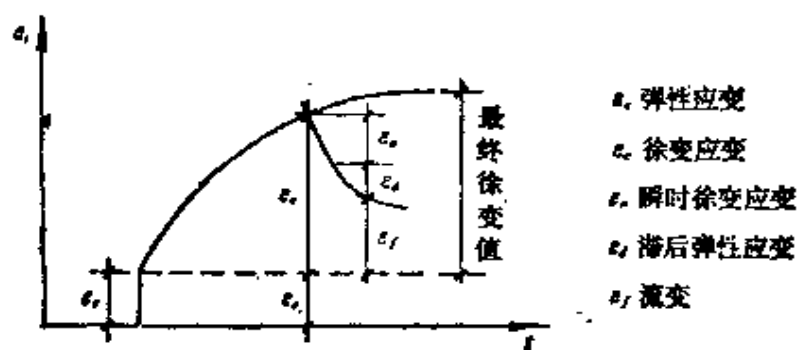


图 5-15 ϵ - t 曲线

美国潘努拉(Panula)及巴森(Bazant)将徐变分为基本徐变与干燥徐变，不按滞后弹变和流变来分类，也是一项最新科研动态。

目前徐变研究大致分为两大派：

第一派属于非线性徐变理论研究，它最完善地考虑了徐变特征的现象，对进一步研究徐变理论的发展具有重大意义，但是应用于实际设计方法还有许多悬而未解的难题。

第二派是以线性理论为基础，一是以老化理论为基础，考虑结构体系和预应力筋影响；二是考虑滞后弹性。

国内学者多数致力于反映弹性滞后变形可恢复性的研究，提供一个能考虑施工过程的平面杆系徐变分析程序。另外还发展工程施工控制程序主要要解决徐变对内力的影响。可参阅文献[1][2][3]。

本章参考文献

- [1] 金成棣. 混凝土徐变对超静定结构变形及内力的影响—考虑分段加载龄期差异及延迟弹性影响.《土木工程学报》, 1981年9月.
- [9] 范立础, 郑步全. 考虑滞后弹性由混凝土徐变引起的连续梁次内力计算方法.《同济大学学报》, 1985年第三期.
- [3] 郑信光. 变位法分析混凝土桥梁的徐变影响.《重庆交通学院学报》, 1984年第3期.

第六章 结构可靠度理论

本章介绍结构可靠度基本原理：包括工程概率术语、中心点法及验算点法、误差传递公式、迭代法计算示例。最后，对公路桥梁可靠度理论进行分析，并提出展望。

6.1 概述

6.1.1 结构可靠度理论

结构设计的基本目的是使结构在预定的使用期限(称作基准期)内达到各种预期功能的要求，也就是要满足下列几项具体内容：

- (1) 能够承受正常施工和正常使用时可能出现各种作用（指在过去容许应力设计或荷载系数极限状态设计中的荷载）；
- (2) 在正常使用时应具备良好的工作性能；
- (3) 具有足够的耐久性；
- (4) 在偶然事故发生时以及发生后，结构仍能保持整体稳定性。

其中，(1)，(4)两项指结构的安全，(2) 指的是结构的功能，(3) 指结构的耐久。这三者，即安全性、功能性及耐久性，它们的总称就是结构的可靠性。当结构不能够满足上述要求时，那么结构失效，通常用失效率 P_f 表示，而衡量结构可靠性的指标称为可靠度，通常也称作康乃耳指标，用 β 表示之。

当采用概率设计法时，结构可靠度可以定义为：“结构可靠是指结构在预定条件下和预定使用时间内完成规定功能的概率。”

在结构可靠度分析中，人们最关心的是结构的安全。为了保证结构的安全，必须使结构具备足够的抗力来抵抗结构在基准期内最大的作用，换言之要满足下列不等式：

$$R \geq S \quad (6-1)$$

式中, R ——结构抵抗外部作用的能力;
 S ——结构的作用。

结构可靠度的设计内容,就是在确定,抗力、作用,极限状态方程后找出结构的可靠度指标 β 及失效率 P_f 。

6.1.2 结构设计安全度水准

国际安全度联合委员会 (JOSS) 关于结构的设计曾经建议分成三类水准:

水准 I (也称半概率半经验法) 仅在荷载和材料强度的设计取值上,分别考虑了一定程度的概率原则,而安全系数的取值主要凭经验主观判断决定。目前常用的容许应力法和单一系数破坏状态法均属该水准的范畴。

水准 II (近似概率法) 考虑了荷载效应和结构抗力的联合分布,一般假定为正态分布或对数正态分布,由于对分布类型及计算需做些近似假定,故也称近似概率法。该水准中最具有代表性的方法,即一次二阶矩法,目前此法已进入实用阶段。

水准 III (全概率法) 运用对结构反应有影响的各个因素同时发生的全概率来描述,并考虑失效区域的真实性质,确定结构或结构构件失效的精确概率。此法极其复杂而且统计资料不完备。当前结构可靠度理论研究水平来判断,水准 III 方法用于实际设计尚有一定距离。

上述三类水准属于结构安全度理论中的不同层次。其中水准 I 是水准 III 的近似,水准 II 是水准 III 的离散化。

6.1.3 桥梁结构设计理论的演变

6.1.3.1 容许应力法 容许应力法是一种依据于结构在线弹性范围内传统设计方法。目前在公路及铁路桥涵设计,仍在使用的。从材料强度上看,由荷载引起截面上任一点的应力必须低于规范中列出的容许应力 $[\sigma_0]$ 。

$$\sigma \leq [\sigma_0] \quad (6-2)$$

在(6-2)式中,容许应力 $[\sigma_0]$ 是将材料屈服点(如钢材)的应力,或破坏时的平均极限应力(如混凝土),除以安全系数 K 。安全系数 $K (>$

1)是以工程经验为基础的系数。这个设计方法的最大缺点是不能够反映整个结构的真实承载能力和安全储备。

6.1.3.2 单一系数破坏阶段法 破坏阶段法是容许应力法的初级阶段的发展。以正截面强度设计为例,其设计准则要求作用在截面上的荷载弯矩 M 不大于截面允许抵抗弯矩 $[M_p]$,即

$$M \leq [M_p] = \frac{M_p}{K} \quad (6-3)$$

式中, M_p ——截面破坏阶段的抵抗弯矩;

K ——安全系数。

此法与容许应力法的主要区别在于计算模式。容许应力法着眼于截面上的应力,而破坏阶段法重视构件的安全储备。此法主要缺点是取单一安全系数。荷载有恒载和活载取单一的安全系数似乎不合理。

6.1.3.3 荷载系数设计法(极限状态法) 此法也称多系数的破坏阶段法,其设计准则为

$$\sum \gamma_i Q_i \leq Q_u \quad (6-4)$$

式中 Q_u ——结构某一破坏状态(极限状态)相应抵抗力;

Q_i ——第 i 作用的荷载;

γ_i ——相应的荷载系数。

此法较前两种方法的优点是不仅较真实地反映的承载力,而且还要考虑不同的荷载、不同材料及不同的工作条件。

6.1.3.4 可靠度理论 其设计准则为

$$\gamma_0 (\sum \gamma_{SG1} S_{G1} + \gamma_{SQ1} S_{Q1} + \sum_{j=2}^m \gamma_{SQj} \psi_{cj} S_{Qj}) \leq R(f_d, a_d) \quad (6-5)$$

式中, γ_0 ——结构重要性系数,按不同的安全等级采用;

γ_{SG1} ——第一个永久作用的分项系数;

$\gamma_{SQ1}, \gamma_{SQj}$ ——第一个(最大一个)和其它第 j 个可变作用的分项系数;

ψ_{cj} ——第 j 个可变作用的组合值系数;

S_{G1} ——第一个永久作用产生的效应;

S_{Q1} ——第一个可变作用产生的效应;

S_{Qj} ——其它第 j 个可变作用的组合系数,

R ——结构构件的抗力;

f_d ——材料性能的设计值;

a_d ——几何参数的设计值。

6.2 工程概率术语

(1) 实验频率

一般设随机事件中 A 在 n 次试验出现为 n_A 次, 其比值

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$$

称做事件 A 在这几次试验中出现的频率(Frequency)。

(2) 样本空间(Sample Space)

设 E 为一试验, 如果事先不能准确地预言其结果, 并且在相同条件下可以重复进行, E 就称做随机试验, 随机试验中每一个可能的结果, 称做随机事件(Random Event)或者简称事件(Event)。

在某一随机试验中, 它的每一个可能出现的不可再分的结果是最简单事件, 称为基本事件。 E 的所有基本事件的组成集合叫做随机试验 E 的样本空间。基本事件也称做样本点(Set)。

(3) 随机变量(Random Variable)

设 E 是随机试验, 它的样本空间是 $S = \{e\}$, e 为试验值。如果对于每一个 $e \in S$ 有一个实数 $X(e)$ 和它对应。 ϵ 为对应表达符号。这样就得到一个定义在 S 上的实值单值函数 $X(e)$, 我们称 $X(e)$ 为随机变量

a. 离散型随机变量 对某些随机变量它全部可能取得的值是有限个或者可以列出无限多个。这种随机变量叫做离散型随机变量(discrete random variable), 如图 6-1 所示。

b. 连续型(Continuous)

如果随机变量 x 的分布函数为 $F(x)$, 而密度函数为 $f(x)$ 则

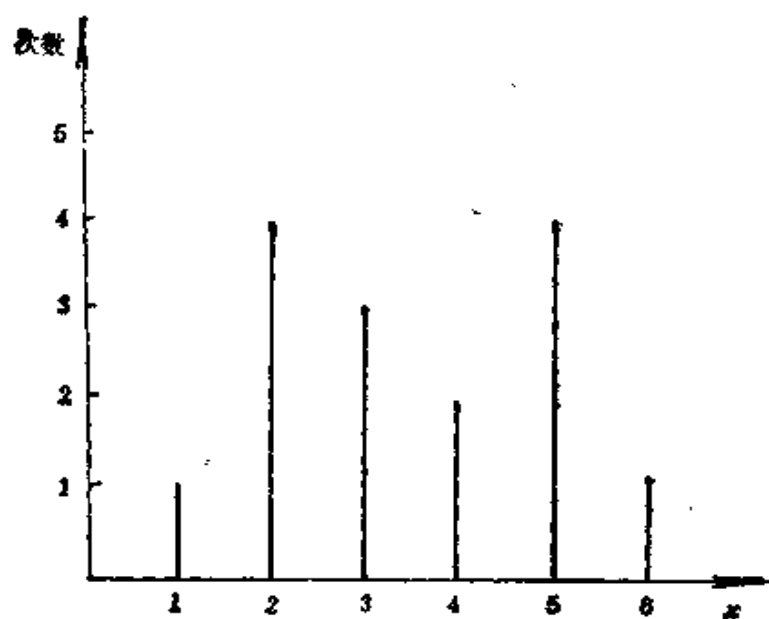


图 6-1 离散型变量

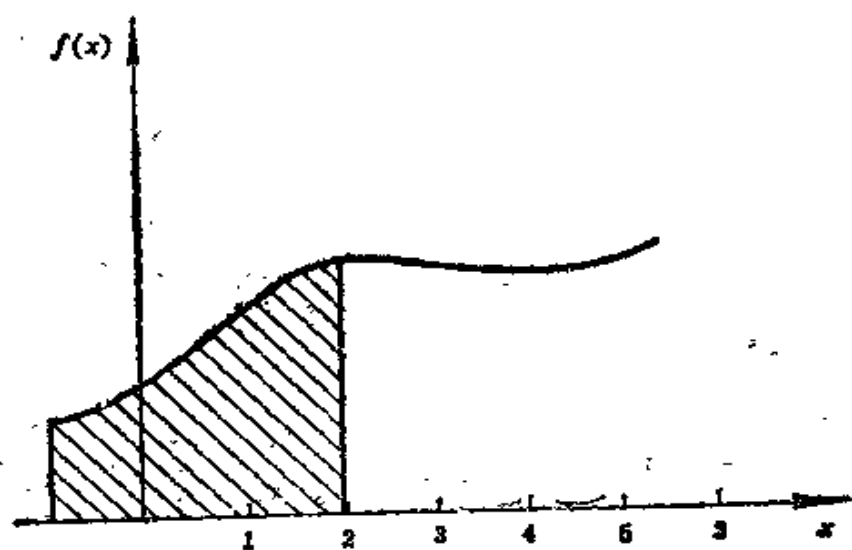


图 6-2 连续型变量

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$$

这样的 x 为连续型随机变量 (continuous random variable) 如图 6-2 所示。

(4) 概率密度函数 (probability density function 简称 pdf), 一

般用 $f(x)$ 表示, 即任何一个非负数在竖轴上可以积分的实函数, 但是它要满足下列条件:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

(5) 概率分布函数(cumulative distribution function, 简称 cdf) 一般用 $F(x)$ 表示, $F(x) = \int_0^x f(x) dx$, 或者 $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ 。因此 $F(x)$ 是概率。

(6) 均值(Mean Value)

又称数学期望值, 它反映在随机变量中的集中值, 也就是概率密度函数的质量, 一般用 $E(x)$, m 或 μ 来表示

(a) 对离散型随机变量

$$E(x) = \frac{\sum X_i P_i(X_i)}{\sum P_i(i)} \quad (i = 1, 2, 3, \dots)$$

$P_i(X_i)$ 是某一点 X_i 的概率。

(b) 对连续型随机变量

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

参见图 6-3, 均值也称作面积矩或一阶原点矩。

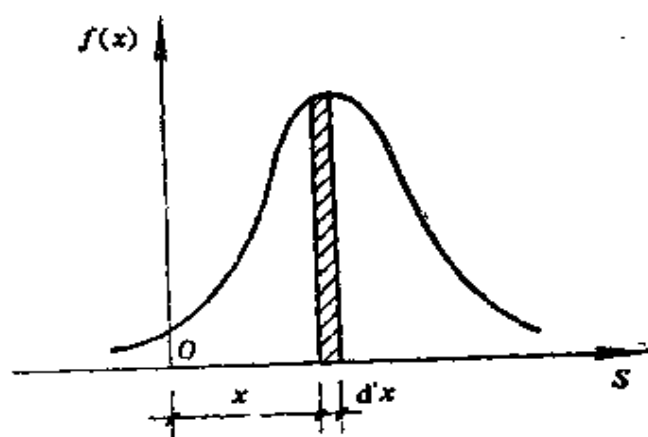


图 6-3 均值

(7) 方差和标准差(Variance and Standard Deviation)

a. 对离散型随机变量, 方差 $D(x)$ 表示为

$$D(x) = \sum_{i=1}^n [X_i - E(x)]^2 P(i)$$

这里 $E(x)$ 为均值, X_i 任意值, $P(i)$ 为概率。

b. 对连续型随机变量

$$D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [X_i - E(x)]^2 f(x) dx$$

标准差(也称均方差)定义为 $\sigma_x = \sqrt{D(x)}$, σ_x 的大小是观测数据离散程度的一个特征值。方差也称作二阶中心矩。例如对混凝土标号(极限抗压强度, 试件 20 cm × 20 cm × 20 cm 立方体)共实测二批第一次三个试件分别为 18 MPa, 20 MPa, 22 MPa 其均值为 20 MPa 其标准差。

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(18-20)^2 + (20-20)^2 + (22-20)^2}{3}} = 1.63 \text{ MPa},$$

第二批试块强度分别为 16, 20, 24 MPa, 而均值为 20 MPa,

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(16-20)^2 + (20-20)^2 + (24-20)^2}{3}} = 3.26 \text{ MPa}.$$

从两批试验来看, 均值 m_x 都是 20 MPa, 而第二批的标准差为 3.26 MPa, 而第一批试件标准差为 1.63 MPa。这说明第二批试验值的离散性大于第一批。也就是说第二批质量不如第一批质量好。但是不论第一批或第二批均有三次试验值, 也就是子样过少, σ_x 值不可靠。应该给予修正。贝塞耳根据试验提出如下修正公式, 即

$$\theta_x = \sigma_x \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}} \quad (6-6)$$

式中, n ——子样数, n 不可能等于 1.0;

σ_x ——用子样 n 算出的标准差;

θ_x ——接近于真实的标准差。

一般来说, $n \geq 30$ 时可以不修正。如上述第一批 $\sigma_x = 1.63 \text{ MPa}$ 修正后 $\theta_x = 1.63 \sqrt{\frac{3}{3-1}} = 1.63 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 1.63 \times 1.225 = 1.996 \text{ MPa}$ 。而

第二批 $\sigma_x = 3.26 \text{ MPa}$, 修正后 $\theta_x = 3.26 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 3.26 \times 1.225 = 3.993 \text{ MPa}$ 。

(8) 变异系数(Coefficient Of Variation 简写 COV)

一般用 v_x 表示, $v_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{m} = \frac{\sqrt{D(x)}}{m}$ 。

方差与标准差(均方差)均用来衡量随机变量的离散程度,但它们都是绝对值,还不能反映相对的离散性。而变异系数是一个无量纲,它能反映几组试验的误差大小。

例如:

第一组 R 16 MPa 20 MPa 24 MPa

第二组 R 36 MPa 40 MPa 44 MPa

两组的标准差都是 3.26 MPa, 从 σ_x 看不出优劣。他们两组的离散程度一样,但是两组变异系数不同。

$$v_{x1} = \frac{3.26}{20} = 0.163$$

$$v_{x2} = \frac{3.26}{40} = 0.081$$

这说明第二组试件, 它的相对离散程度比第一组小。同时它的均匀性比第一组试件的试验值要优越。

(9) 偏度系数(Coefficient of Skewness 或简称 Skewness)

一般用 θ 表示。

a. 离散型
$$\theta = \frac{\sum [X_i - E(x)]^3 P(x_i)}{\sigma_x^3}$$

b. 连续型
$$\theta = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [X_i - E(x)]^3 f(x) dx}{\sigma_x^3}$$

实际上, θ 是对原点三次矩除以标准差的立方。图 6-4 中表示 $\theta > 0$, $\theta < 0$ 及 $\theta = 0$ 的概率密度分布曲线的偏斜程度。

(10) 峰值系数(Coefficient of Kurtosis)

一般用 α 表示。

a. 离散型

$$\alpha = \frac{\sum [X_i - E(x)]^4 P(x_i)}{\sigma_x^4}$$

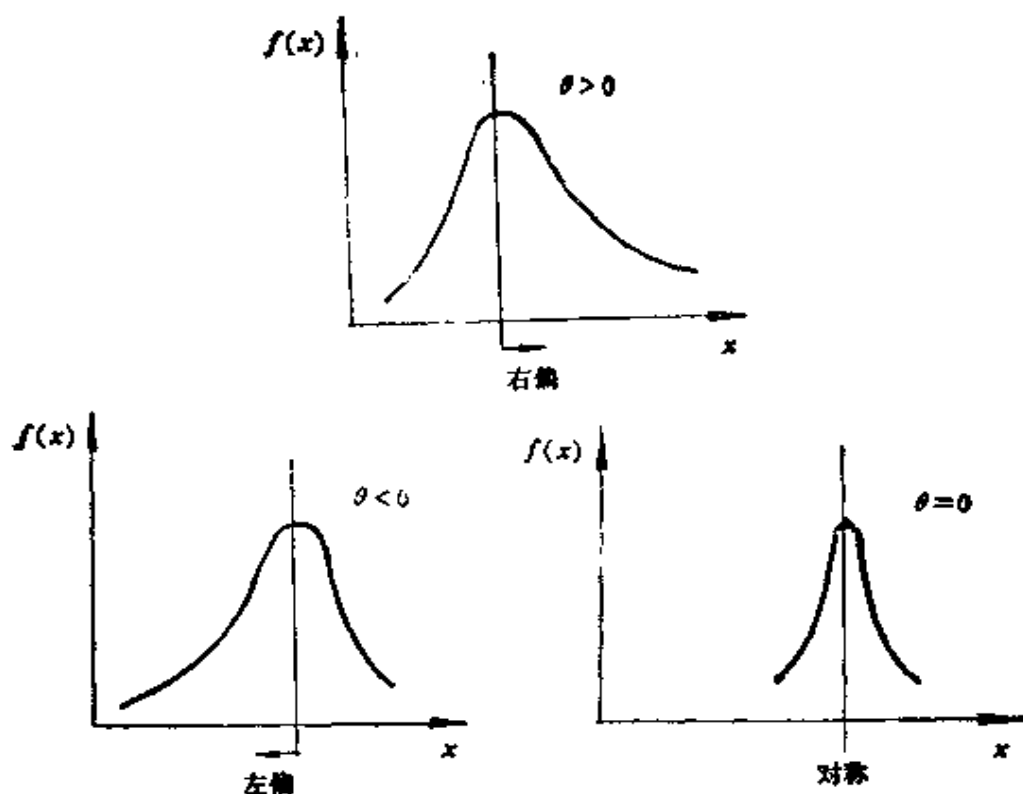


图 6-4 偏度系数

b. 连续型

$$\alpha = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} [X_i - E(x)]^4 f(x) dx}{\sigma_x^4}$$

实际上, α 是对原点四次矩除以标准差的 4 次方。 $\alpha=3$ 属于正态分布, $\alpha>3$ 或 $\alpha<3$ 反映了峰值处的尖偏形状。其他还有相关系数, 协方差的定义, 请阅本章参阅文献[1]。

6.3 可靠度常用的几种概率分布

介绍几种可靠度常用的概率分布:

6.3.1 正态分布

正态分布是最常用的一种概率分布。恒载, 材料强度, 构件重量及尺寸等均属于正态分布。

若随机变量 x , 正态分布的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-E(x)}{\sigma}\right)^2} \quad (6-7)$$

式中, $f(x)$ ——正态分布的概率密度函数;

σ ——标准差;

$E(x)$ ——均值。

正态分布曲线有如下几个特征,即

(1) 曲线对称于 $E(x)$ 轴。

(2) $f(x)$ 是一个单峰值曲线, 其 $E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$;

(3) $x = E(x) + \sigma$ 处是曲线的拐点;

(4) $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x) = 0$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) = 0$;

(5) σ 愈大, 曲线愈矮; σ 愈小, 曲线愈高。

关于正态分布的统计参数为

(1) 均值 $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-E(x)}{\sigma}\right)^2} dx$

(2) 方差

$$D(x) = \sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(x)]^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-E(x)}{\sigma}\right)^2} dx$$

(3) 标准差 σ

(4) 变异系数

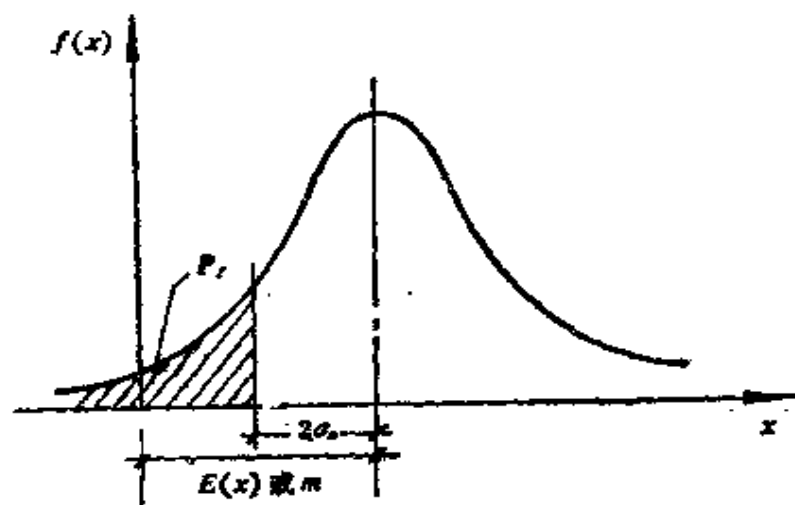


图 6-5 正态分布曲线

$$v = \frac{\sigma}{E(x)}$$

图 6-5 给出正态分布曲线和 2σ 时的失效率 P_f

当 $\sigma = 2$ 时, $P_f = 0.0228$ 而保证率为 $P_s = 0.9772$ 。在决定材料标准强度时, 公路桥涵规范就取 $E(x) - 2\sigma$ 。

对两个事件同时发生的概率为 $\int_0^{\infty} F_R(s) \cdot f_s(s) ds$ 。如果荷载效应的密度函数概率为 $f_s(s)$, 抗力密度函数概率为 $f_R(s)$, 其效率: $P_f = \int_0^{\infty} F_R - f(s) ds$, 见图 6-6 所示。但结构保证率加失效率等于 1, 即 $P_s + P_f = 1$

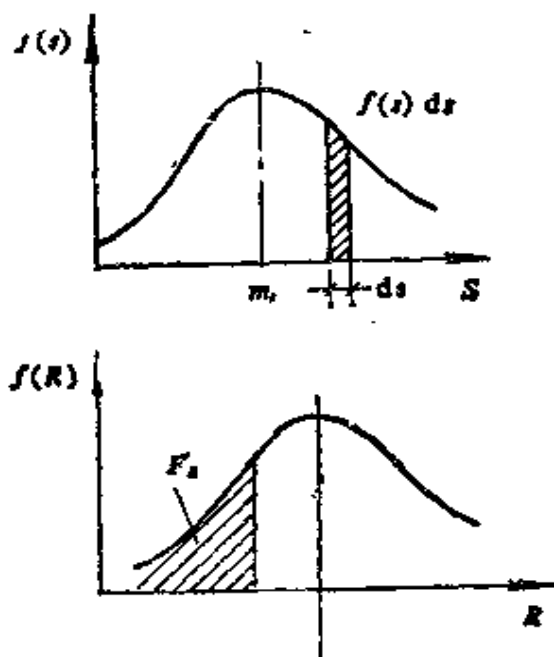


图 6-6 两个事件同时发生的概率曲线

6.3.2 对数正态分布

对数正态分布的实例很多, 例如混凝土裂缝与挠度的分布规律, 结构的抗力都服从对数正态分布。

其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{X \cdot \sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln X - E(x)}{\sigma} \right)^2} & X > 0 \\ 0 & X \leq 0 \end{cases}$$

其中, $E(x)$, $\sigma > 0$ 为常数, 则称 X 服从参数为 $E(x)$, σ 的对数正态分布。它的概率分布函数为

$$F(X) = \int_{-\infty}^{X_1} \frac{1}{X\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left[\ln x - \frac{E(x)}{\sigma}\right]^2} dx$$

式中, x_1 为随机变量某一取值。

对数正态分布概率密度函数 $f(x)$ 的图像如图 6-7 所示, 它在正偏偏度, 即向左偏斜

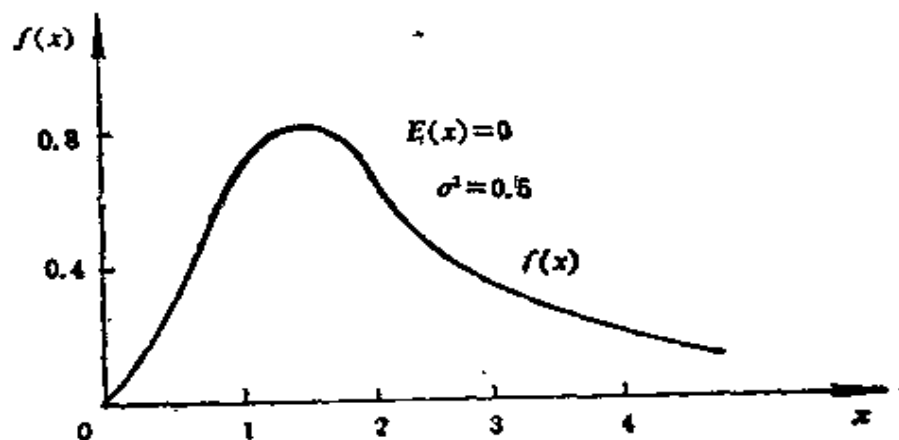


图 6-7 对数正态分布概率密度函数曲线

关于对数正态统计参数为:

均值 $E(X) = e^{(E(X) + \frac{1}{2}\sigma^2)}$

方差 $\sigma^2(X) = e^{(2E(X) + \sigma^2)}(e^{\sigma^2} - 1)$

标准差 $\sigma(X) = e^{(E(X) + \frac{1}{2}\sigma^2)} \cdot \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$

变异系数 $v(x) = \frac{\sigma(X)}{u(X)} = \sqrt{e^{\sigma^2} - 1}$

在实际应用中, 可利用对数正态分布的平均值 $E(X)$ 及标准差 $\sigma(X)$ 来表达密度函数中的 $E(X)$, σ , 它们的关系式如下

$$\mu = \ln \frac{u(X)}{\sqrt{1 + v_x^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{\ln(1 + v_x^2)}$$

这样有利于用正态分布的表格, 求概率。

6.3.3 极值 I 型分布

极值 I 型分布也是常用一种概率分布，例如风荷载、雪荷载长期荷载作用下的裂缝分布均属于极值 I 型。其：

概率密度函数为：

$$\begin{aligned} f_I(x) &= \alpha e^{-\alpha(x-u)} \exp[-e^{-\alpha(x-u)}] & x \geq 0 \\ f_I(x) &= 0 & x < 0 \end{aligned}$$

其概率分布函数 $F_I(x) = \exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\}$

式中， α 表示统计数据离散性参数

$$\alpha = \frac{1.28255}{\sigma_x}, \sigma_x \text{ 随机变量的标准差}$$

$$\mu = \mu_x - 0.45005 \sigma_x, \mu \text{ 称为众数。}$$

6.4 中心点法

如果抗力 R 与荷载效应 S 均是线性变化的，则极限方程式 Z 可以写成

$$Z = R - S \quad (6-8)$$

将(6-8)式用图线表示，示于图 6-7 中。

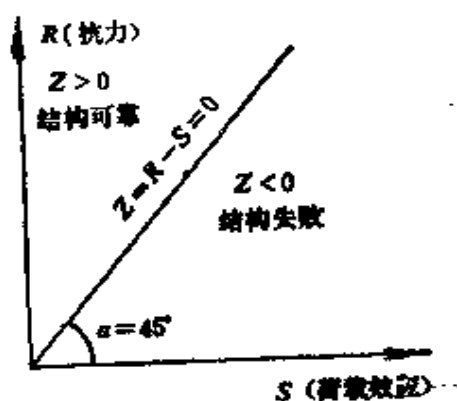


图 6-8 $Z = R - S$ 图形

$Z = 0$ 为极限状态， $Z > 0$ 表示结构安全， $Z < 0$ 表示结构失效。

令 m_Z, m_R, m_S 为 Z, R 及 S 的均值， σ_Z, σ_R 及 σ_S 为其标准差。以原点为依据，我们得到：

$$\beta = \frac{m_Z}{\sigma_Z} \quad (6-9)$$

式中, β ——可靠度指标。

由于极限方程 $Z = R - S$, 所以均值 $m_z = m_R - m_S$, 标准差 $\sigma_z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$, 故(6-9)变为:

$$\beta = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (6-10)$$

$$P_f = P(Z < 0) = P\left(\frac{m_z}{\sigma_z} < 0\right) = \Phi(-\beta) \quad (\Phi \text{ 是函数表示符号})$$

当 β 已知后可查阅标准正态分布的分布函数表得到。

现在选取 $\beta = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5$ 及 P_f 的对应值。但必须指出表 6-1 数据不能内插也不能外推。

β 与 P_f 对应表

表 6-1

β	P_f	β	P_f
1.0	1.587×10^{-1}	3.0	1.36×10^{-3}
1.5	6.68×10^{-2}	3.5	2.23×10^{-4}
2.0	2.28×10^{-2}	4.0	3.17×10^{-5}
2.5	0.62×10^{-2}	4.5	3.40×10^{-6}

注: β 在表内中间值时不能内插。

β 值与 P_f 的关系可以看出 P_f 愈大, β 愈小; 相反 P_f 小则 β 大。图 6-9 显示这一关系。

利用(6-10)公式, 即中心点法计算可靠度 β 必须有两个前提: ① 基本变量服从正态或对数正态分布。② 极限方程(或称功能函数)为线性, 如果极限方程是非线性, 则 β 计算结果有较大误差。

我国工民建已采用结构可靠度理论进行设计, 它将结构分为三个等级见规范(GBJ 68-84 试行)。破坏类型分延性与脆性两类, β 值的要求参见表 6-2 规定。

工民建结构等级与 β 值的要求

表 6-2

破坏类型	安全等级		
	一级	二级	三级
延性破坏	3.7	3.2	2.7
脆性破坏	4.2	3.7	3.2

注 1. $\beta=2.7$ 3.2 3.7 4.2
 $P_f=3.5 \times 10^{-3}$ 6.9×10^{-4} 1.1×10^{-4} 1.3×10^{-5}
 2. β 可有 ± 0.25 上下

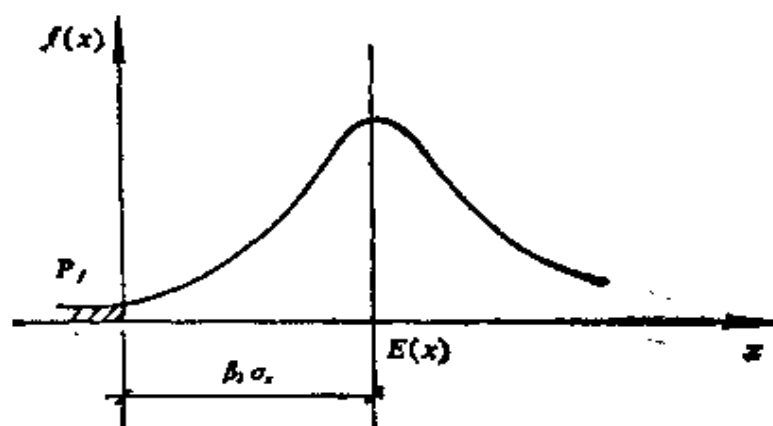
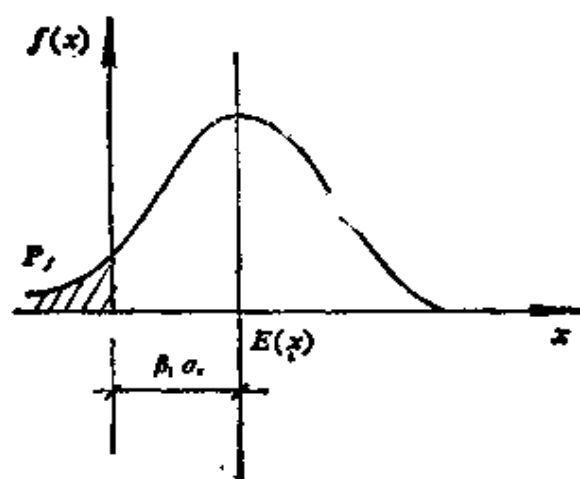


图 6-9 P_f 与 β 关系图

6.5 验算点法(J.O.法)

由于中心点法不够精确,对非线性极限方程求解 β 值时存在误差,故介绍验算点法。

验算点法是国际安全度联合委员会(JOSS)推荐的方法故又简称J.O.法,该法具有下列特点:

- (1) 能够解决非正态分布的随机变量;
- (2) 可以适用非线形的极限方程(或功能函数);
- (3) 获得精度高的 β 值;
- (4) 求得验算点的设计值。

6.5.1 R, S 两个变量情况

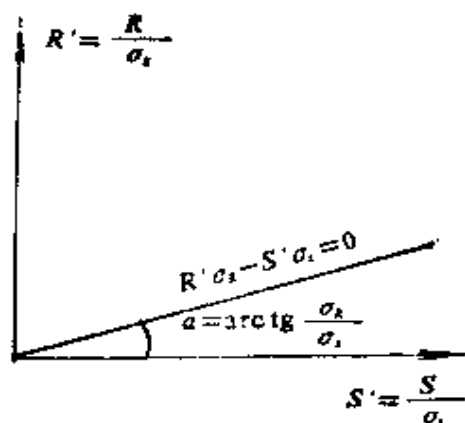


图 6-10 $R-S=0$ 坐标转换, 转换后为 $R'\sigma_R - S'\sigma_S = 0$

(1) 第一次坐标变换

$$Z = R - S = 0$$

令 $R' = \frac{R}{\sigma_R}$; $S' = \frac{S}{\sigma_S}$ 代入上式, 得到

$$Z = R'\sigma_R - S'\sigma_S = 0$$

则

$$\therefore S' = \frac{\sigma_R}{\sigma_S} R'$$

(2) 第二次坐标变换(平移)

现令 $\hat{S} = \frac{S - m_S}{\sigma_S}$, $\hat{R} = \frac{R - m_R}{\sigma_R}$, 这种转换称作标准化或高斯

(Gauss)化, 将上式 \hat{S} 及 \hat{R} 代入 $R - S = 0$ 中, 则有

$$\hat{R}\sigma_R - \hat{S}\sigma_S + (m_R - m_S) = 0$$

将法线化因子 $-\frac{1}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$ 乘上列方程中的各项, 则有

$$-\hat{R} \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} + \hat{S} \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} - \frac{(m_R - m_S)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = 0$$

简化上式得到

$$\hat{R} \cos \theta_R + \hat{S} \cos \theta_S - OP^* = 0 \quad (6-11)$$

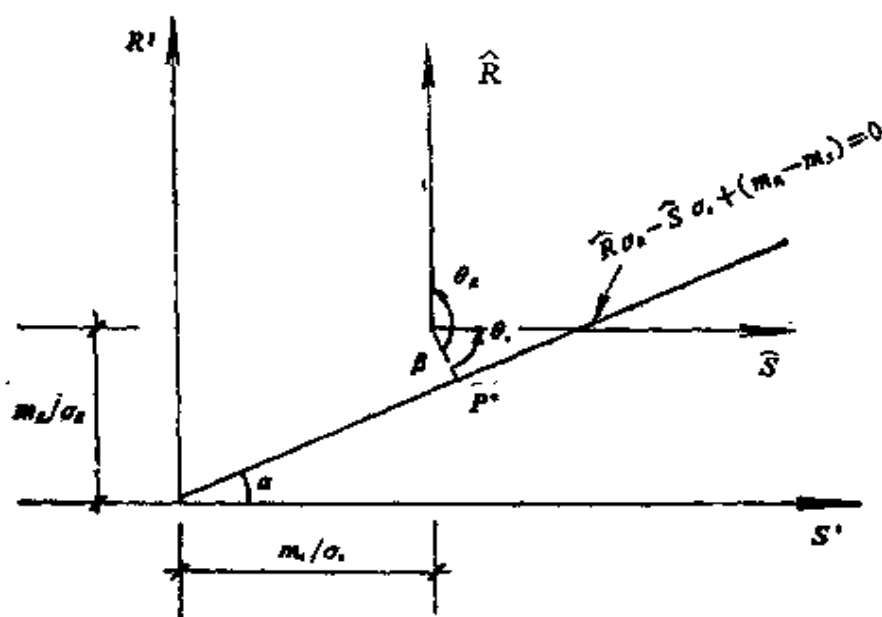


图 6-11 高斯化后验算点及 β 的表达式

式中, $\cos \theta_R = \frac{-\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$

$$\cos \theta_S = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}$$

$$OP^* = \frac{m_R - m_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \beta$$

σ_R ——抗力标准差;

σ_S ——荷载效应标准差;

β ——可靠度指标。

将(6-11)式用图线表示, 则不难看出 P^* 为验算点而 OP^* 的距离

相当于 β 值。 P^* 为设计中的验算点 (r^*, s^*) , 其中 r^*, s^* 为

$$r^* = \beta \sigma_R \cos \theta_R + m_R$$

$$s^* = \beta \sigma_S \cos \theta_S + m_S$$

$$r^* - s^* = 0$$

6.5.2 多个正态基本变量情况

如果极限状态方程包括三个变量, 例如

$$R - Q - S = 0$$

这里, Q 及 S 分别为恒载和汽车荷载效应。则上式普遍表达式写作

$$Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n), R = X_1, Q = X_2, S = X_3$$

根据上节, 同理得到

$$\cos \theta_{xi} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial X_i} / \sigma_{xi}}{\left[\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial g}{\partial X_i} / \sigma_{xi} \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

那么验算点 $X_i^* = \sigma_{xi} \beta \cos \theta_{xi} + m_{xi}$, $g(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*) = 0$ 如图 6-12 中, $OP^* = \beta$

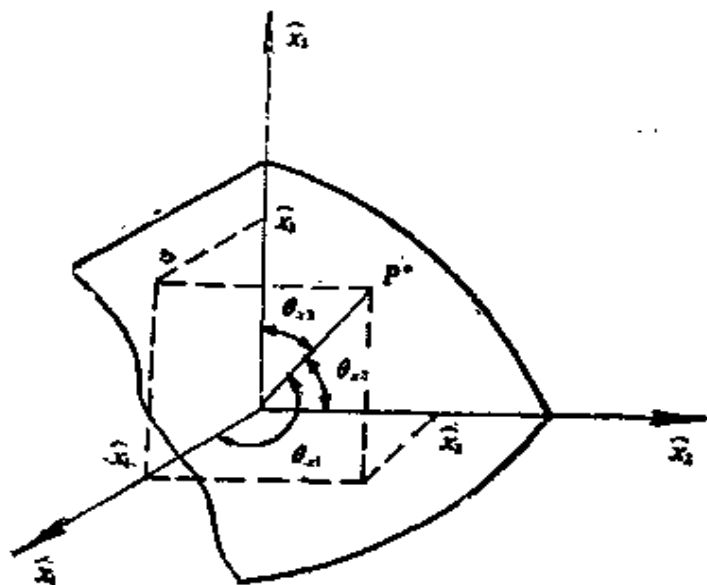


图 6-12 多个正态分布基本变量图

6.5.3 非正态分布

非正态分布可以用当量正态分布来代替, 但当量正态分布要满足

下面两个原则

(1) 在验算点 P^* 处使非正态度量 X_i 及当量正态变量 X'_i 具有相同概率密度 (pdf), 即 $f(X_i^*) = f'(X_i^*)$ 。

(2) 在 x_i 作用点上具有相同概率分布, 即 $P(X_i^*) = P'(X_i^*)$ 。图 6-13 表示上述两原则。

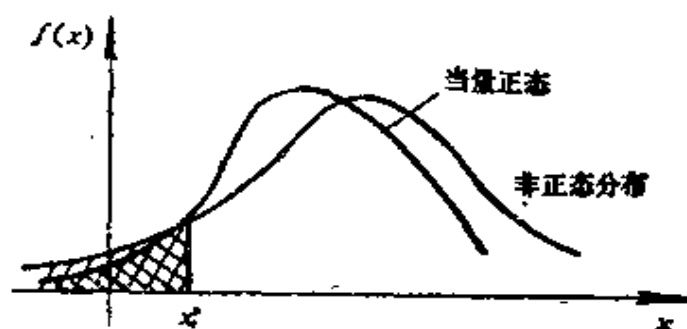


图 6-13 非正态分布换算成当量分布

6.6 误差传递公式

如果 x_1, x_2, \dots 为相互独立的随机变量 Z 为极限方程式, 则误差传递公式视变量的代数式形式而异约分下列几种情况求得, 均值, 标准差及变异系数。

(1) $Z = X_1 \pm X_2 \pm X_3$

则 $m_z = m_{x1} \pm m_{x2} \pm m_{x3}$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \sigma_{x3}^2}$$

(2) $Z = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$

则 $m_z = m_{x1} \cdot m_{x2} \cdot m_{x3}$

$$v_z = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2}$$

$$\sigma_z = v_z \cdot m_z$$

(3) $Z = \frac{X_1 \cdot X_2}{X_3 \cdot X_4}$

则 $m_z = \frac{m_{x1} \cdot m_{x2}}{m_{x3} \cdot m_{x4}}$

$$V_z = \sqrt{v_{x1}^2 + v_{x2}^2 + v_{x3}^2 + v_{x4}^2}$$

$$\sigma_z = V_z \cdot m_z$$

(4) $Z = CX$, C 为常数

则

$$m_z = Cm_x$$

$$v_z = v_x$$

$$\sigma_z = v_z \cdot m_z$$

(5) $Z = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$m_z \approx g(m_{x1}, m_{x2}, \dots, m_{xn})$$

$$\sigma_z = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial X_1} \right)_m^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial X_2} \right)_m^2 \sigma_{x2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial g}{\partial X_n} \right)_m^2 \sigma_{xn}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

6.7 用验算点法求可靠度指标的示例

结构形式及受力点如图 6-14 所示, 试用验算点法, 求解正常使用极限状态下挠度可靠度指标 β 值。

已知:
$$\delta_{\max} = \frac{5Pl^3}{48EI} \leq [\delta] = \frac{l}{30}$$

式中, P ——荷载;

l ——跨径;

E ——结构的弹性模量;

I ——全截面惯矩;

δ ——挠度。

随机变量有 P , E , I , l , 其均值与标准差给出如下

$$m_P = 4\text{kN} \quad \sigma_P = 1\text{kN}$$

$$m_l = 5\text{m} \quad \sigma_l = 0$$

$$m_E = 2 \times 10^7 \text{ kN/m}^2 \quad \sigma_E = 0.5 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$$

$$m_I = 10^{-4} \text{ m}^4 \quad \sigma_I = 0.2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

解答:

(1) 功能函数
$$\frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{l}{30} = 0$$

$l = 5\text{m}$, $\sigma_l = 0$ 可以认为 l 是个确定量, 则

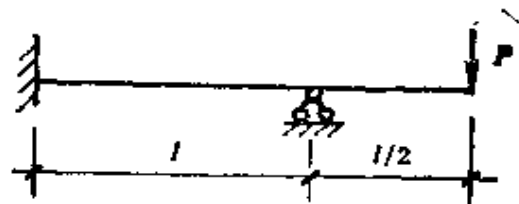


图 6-14 结构受力状态求正常使用极限状态下挠度的可靠度指标 β

$$EI - 78.125 P = 0 \quad (\text{即 } g(X_1, X_2, X_3) = 0)$$

(2) 求偏导

$$\frac{\partial g}{\partial E} / P^* = I^*; \quad \cos \theta_E = \frac{-\frac{\partial g}{\partial E} / P^* \cdot \sigma_E}{[I^* \cdot \sigma_E]^2 + (E^* \sigma_I)^2 + (-78.125 \sigma_P)^2}^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial I} / P^* = E^* \quad \cos \theta_I = \frac{-\frac{\partial g}{\partial I} / P^* \cdot \sigma_I}{[(I^* \cdot \sigma_E)^2 + (E^* \sigma_I)^2 + (-78.125 \sigma_P)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial P} / P^* = -78.125$$

$$\cos \theta_P = \frac{-\frac{\partial g}{\partial P} / P^* \cdot \sigma_P}{[(I^* \cdot \sigma_E)^2 + (E^* \sigma_I)^2 + (-78.125 \sigma_P)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

按已知数据 $I^* = 10^{-4} \text{m}^4$, $E^* = 2 \times 10^7 \text{kN/m}^2$, $P^* = 4 \text{kN}$, 则

$$\cos \theta_E =$$

$$\frac{-10^{-4} \times 10^7 \times 0.5}{[(10^{-4} \times 0.5 \times 10^7)^2 + (2 \times 10^7 \times 0.2 \times 10^{-4})^2 + (-78.125 \times 1)^2]^{\frac{1}{2}}} = -0.775$$

$$\cos \theta_I = \frac{-2 \times 10^7 \times 0.2 \times 10^{-4}}{645.06} = -0.62$$

$$\cos \theta_P = 0.121$$

先假定初始值为均值, $m_I = 10^{-4} \text{m}^4$, $m_E = 2 \times 10^7 \text{kN/m}^2$, $m_P = 4 \text{kN}$

$$E^* = \beta \sigma_I \cos \theta_E + m_E = -0.5 \times 10^7 \times 0.775 \beta + 2 \times 10^7$$

$$I^* = \beta \sigma_I \cos \theta_I + m_I = 0.2 \times 10^{-4} (-0.62) \beta + 10^{-4}$$

$$= 10^{-4} + (-0.124 \times 10^{-4}) \beta$$

$$P^* = \beta \sigma_p \cos \theta_p + m_p = 1 \times 0.121 \times \beta + 4 = 4 + 0.121 \beta$$

将验算点 E^* , I^* , P^* 值代入功能函数中, 得到

$$E^* I^* - 78.125 P^* = 0$$

$$\beta^2 - 14.43 \beta + 35.13 = 0, \text{ 解得 } \beta = 3.55$$

进行四次迭代后, 最后解得 $\beta = 3.29$, 相应失效率 $P_f = 5 \times 10^{-4}$ 。

(参见本章参考文献[2]附录Ⅱ表格, $y = -3.29$)

6.8 工程极限状态的分类

工程结构的极限状态分为两类, 即承载能力极限状态和正常使用极限状态。

6.8.1 承载能力极限状态

对应于结构或结构构件达到最大承载能力或出现不适于继续承载的变形。当结构或结构构件出现下列状态之一时, 即认为超过承载能力极限状态:

- (1) 整个结构或结构的一部分作为刚体失去平衡(倾覆、滑移等);
- (2) 结构、结构构件或连接因材料强度或疲劳强度被超过而导致破坏;
- (3) 结构或结构构件因过度的塑性变形而不适于继续承载;
- (4) 结构变为机动体系(如倒塌);
- (5) 结构或结构构件丧失稳定(如压屈等)。

6.8.2 正常使用极限状态

对应于结构或结构构件达到正常使用或耐久性能所规定的某种准则或限值。当结构或构件出现下列状态之一时, 即认为超过正常使用极限状态:

- (1) 影响行驶质量或行车安全的过大不平整, 车辙或其他过大变形;
- (2) 影响结构耐久性能或结构外观的局部损坏(如裂缝、腐蚀等);
- (3) 影响正常使用的过大振动(包括共振), 引起人们不舒适和恐惧感等);

(4) 影响正常使用的其他特定状态。

(6-5)式给出极限状态承载能力的组合。对于常使用极限状态,结构构件的设计表达式如下:

1. 作用效应的短期组合

$$\left(\sum_{i=1}^n S_{Gi} + \sum_{j=1}^m \gamma_{SQj} S_{QjK} \psi_{ij} \right) \leq [C]$$

式中, S_{Gi} ——表示永久作用;

ψ_{ij}, S_{QjK} ——第 i 种可变作用频遇值引起的效应;

γ_{SQj} ——分项系数;

$[C]$ ——结构功能要求的极限值。

2. 作用效应的长期组合

$$\left(\sum_{i=1}^n S_{Gi} + \sum_{j=1}^m \gamma_{SQj} \psi_{ij} S_{QjK} \right) < [C] \quad (6-12)$$

式中, $\psi_{ij} S_{QjK}$ ——第 i 种可变作用准永久值引起的效应。

至于 ψ_{ij} 及 ψ_{ij} 取值需要经过分析与观测确定。

6.9 对可靠度理论的几点探讨与展望

6.9.1 几个问题的探讨

1. 基准期

结构设计所规定的时间,在公路工程桥梁结构中,基准期可取100年。基准期不是结构的寿命,祇能取一个水准不能对不同材料的结构取不同基准期。它相应于设计洪水位的取值,如取百年一遇就都用百年一遇。

2. 失效率(P_f)

a. 密度函数中抗力 $f(R)$ 与荷载效应 $f(S)$ 重叠区愈小, P_f 也愈小,反之 $f(R)$ 与 $f(S)$ 重叠区扩大, P_f 也随之增大。

b. $f(R)$ 与 $f(S)$ 的相对位置可用均值 m_R 与 m_S 来衡量。如令 $\bar{S} = \frac{m_R}{m_S}$, 这里 \bar{S} 称为中心点定值的安全系数。显然, \bar{S} 愈大, P_f 愈小;反之 \bar{S} 愈小, P_f 愈大。

c. 失效率 P_f 的大小可用均值差 $m_R - m_S$ 表示; $m_R - m_S$ 愈大, P_f 愈小, 反之 P_f 变大。从图 6-15 中可以看出 $f(R)$ 与 $f(S)$ 完全没有重叠区, 故结构是绝对安全的。

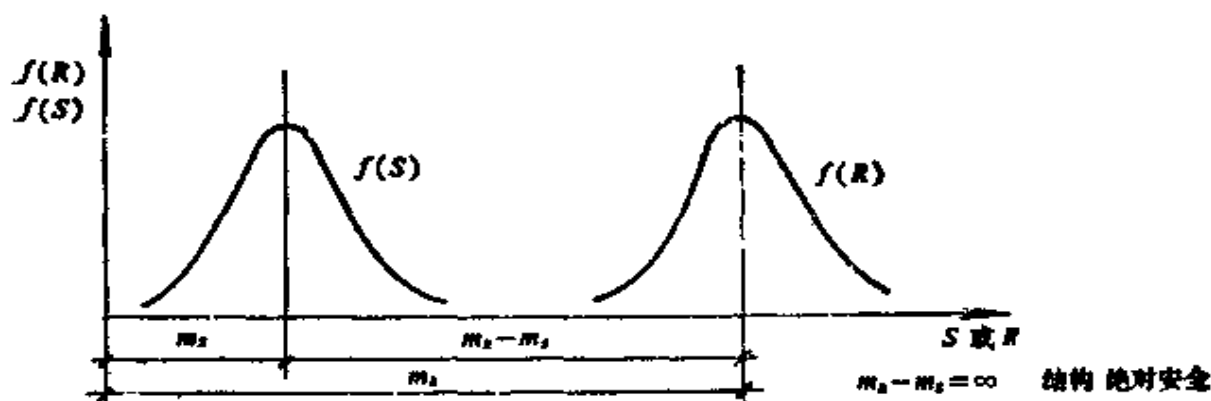


图 6-15 $f(R)$ 与 $f(S)$ 的关系图

d. 失效率 P_f 与抗力的标准差 σ_R 和效应的标准差有关。

3. β 值的选定

β 值的选定一般均分三级, 两类不同型式的破坏。桥梁上选用的 β 值应比工民建高一个档次。例如工民建二级 $\beta = 3.2$, 在桥梁结构 β 可能为 3.5~3.7。这是因为桥梁结构本身的重要性决定的。可参阅本章参考文献[3]。

4. 准永久值及频遇值;

这个问题可取 0.5 与 0.95 分位点确定, 对正常使用极值状态下准永久值及频遇值的规定与讨论阅读本章参考文献[4]。

6.9.2 展望

可靠度理论由于它的科学性、先进性必然是工程结构设计准则。我国工民业已经采用可靠度理论进行房屋建筑的设计。铁路、水工、港口也已具备向可靠度理论过渡的条件。桥梁工程结构也准备 1995 年完成第三层次文件进入结构设计。因此工程师必需具备概率论基础知识, 并转变一些新概念来接受这一挑战。当然还有些深层次问题, 例如疲劳模式荷载组合等需要进一步加以解决。

本章参考文献

- [1] 赵国藩等.《工程结构可靠度》.水电出版社,1984年第一版.
- [2] Smith, G.N. Probability and Statistics in Civil Engineering.英国 Collins 出版社,1986年第一版,附录Ⅱ.
- [3] 张士铎.对公路桥梁按可靠度理论分析的几点体会.《公路》,1986年第6期.
- [4] 张士铎.正常使用极限状态下准永久值与常遇值的讨论.《公路》,1990年第7期.